

Лекція 4. Задачі лінійного програмування

4.1. Поняття про лінійне програмування

Найбільш розвинутим розділом математичного програмування є лінійне програмування.

Лінійне програмування вивчає важливу для практики задачу відшукування максимуму (мінімуму) лінійної функції при наявності обмежень у вигляді лінійних нерівностей або рівнянь.

Оскільки прикладна сторона математичного програмування – це оптимізація рішень взагалі і в техніці зокрема, то лінійне програмування ще називають лінійною оптимізацією. Алгоритми і програми створені на базі методів лінійного програмування і представлені у персональному комп'ютері, у зручній для їх використання формі, утворюють так звані системи комп'ютерної математики. Ці системи є невід'ємними елементами сучасних інформаційних технологій пошуку оптимального розв'язку. Перейдемо до розгляду ключового елементу цієї технології, а саме методів розв'язання задач лінійного програмування.

4.2. Форми запису задачі лінійного програмування

Загальна задача лінійного програмування полягає в пошуку максимуму (мінімуму) лінійної функції.

$$W = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^n c_jx_j \rightarrow \max (\min)_{X \in G} \quad (4.1)$$

за умови використання обмежень:

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, k}), \quad (4.2)$$

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i = \overline{k+1, m}), \quad (4.3)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad (4.4)$$

які утворюють область допустимих розв'язків G , якій повинен задовольняти вектор керуючих змінних $X = [x_1, \dots, x_n]^T$.

Нагадаємо, що функція W називається показником ефективності або цільовою функцією, або критерієм оптимальності, або лінійною формою. Сукупність значень невідомих керуючих змінних $X = [x_1, \dots, x_n]^T$, що задовольняють умовам (4.2), (4.3), (4.4) задачі (4.1) – (4.4) має назву розв'язку. Розв'язок

$X = [x_1, \dots, x_n]^T$ називається оптимальним, якщо він максимізує (мінімізує) значення показника ефективності.

Якщо в задачі (4.1) – (4.4) виключити обмеження (4.3), то задача лінійного програмування буде називатися *симетричною задачею лінійного програмування*.

Якщо в задачі (4.1) – (4.4) виключити обмеження (4.2), то отримана задача лінійного програмування буде називатися *канонічною* або *основною задачею лінійного програмування*.

Виконуючи формальні перетворення, можливо перейти від симетричної задачі лінійного програмування, до основної і навпаки. Перехід від нерівності до рівності виконується завдяки використанню допоміжних додатних змінних:

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \Leftrightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + y_i = b_i, & (i = \overline{1, k}) \\ y_i \geq 0, \end{cases}$$

або

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i \Leftrightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n - y_i = b_i, & (i = \overline{1, k}) \\ y_i \geq 0. \end{cases}$$

Перехід від рівняння до нерівності виконується шляхом заміни одного рівняння двома нерівностями.

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i, \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i & (i = \overline{k+1, m}). \end{cases}$$

Підкреслимо, що у випадку, коли за фізичним змістом задачі (4.1) – (4.4) деяка змінна x_s може мати будь який знак, то необхідно ввести в дослідження дві допоміжні невід'ємні змінні і цю змінну замінити їх різницею:

$$x_s \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x_s = u_s - v_s, \quad (u_s \geq 0, v_s \geq 0).$$

4.3. Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування

Поставимо задачу лінійного програмування у вигляді

$$W = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max(\min)_{X \in G} \quad (4.5)$$

за умови виконання обмежень G :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \quad x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}) \end{cases} \quad (4.6)$$

Кожна із нерівностей системи (4.6) в Евклідовому просторі є півпростором із граничними гіперплощинами

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j = 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

Припустимо, що система нерівностей (4.6) сумісна. Результат її розв'язання утворює область допустимих розв'язків, яка, як відомо із курсу лінійної алгебри, буде обмежена опуклим багатогранником, грані якого можуть співпадати із частинами гіперплощин, а вершини утворюються як точки перетину цих гіперплощин. Будь-яка внутрішня і гранична точка області допустимих розв'язків є допустимим розв'язком задачі лінійного програмування. Якщо прирівняти показник ефективності до нуля, то отримаємо рівняння гіперплощини в n -вимірному Евклідовому просторі

$$W = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = 0,$$

яка проходить через початок координат і є перпендикулярною до вектора-градієнта $\vec{C} = [c_1, \dots, c_n]^T$, складеного із коефіцієнтів показника ефективності.

Напрямок вектора \vec{C} вказує напрям зростання функції W . Тому, для пошуку максимального значення функції W необхідно пересувати гіперплощину в напрямку вектора \vec{C} так, щоб область допустимих розв'язків і ця пересунута гіперплощина мали хоча б одну спільну точку.

На прикладі двовимірного Евклідового простору проілюструємо малюнками типові випадки, що трапляються при розв'язанні задач лінійного програмування (рис.4.1).

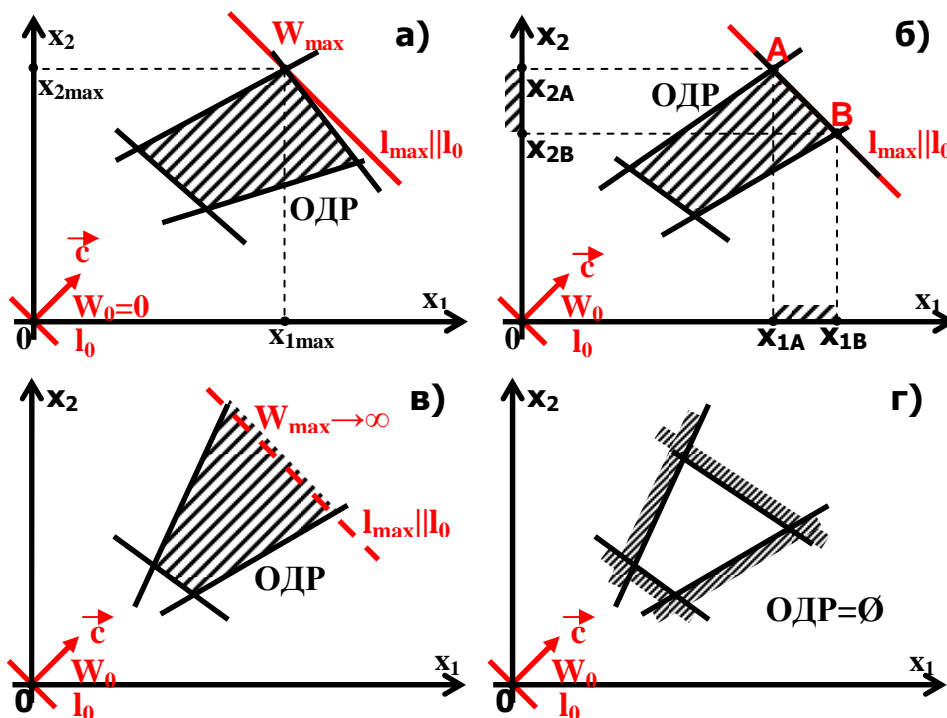


Рис. 4.1. Графічний образ розташування основної площини

$W = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ та області допустимих розв'язків: а) задача лінійного про-

грамування має єдиний розв'язок; б) задача лінійного програмування має безліч оптимальних розв'язків; в) задача лінійного програмування має абстрактний розв'язок (цей розв'язок не має фізичного змісту тому, що не враховано усі ресурсні обмеження, які не дозволяють досягти нескінченно великого значення показника ефективності); г) система обмежень не-сумісна $G = \emptyset$: задача лінійного програмування розв'язків не має.

Вершини області допустимих розв'язків називають *опорними точками*, а розв'язки, що існують в цих вершинах – *опорними розв'язками*.

4.4. Графічний метод розв'язання задач лінійного програмування

Приклад 4.1.

Розглянемо приклад виробничого планування, при $n = 2$. Припустимо, що телекомунікаційна фірма виготовляє вироби двох видів:
 А – супутник зв'язку,
 В – навігаційний супутник.
 Для їх виробництва використовуються ресурси:
 С – базові модулі сонячних батарей;
 D – функціонально необхідні елементи життєзабезпечення супутника;
 E – модулі системи орієнтації, стабілізації та навігації;
 в об'ємах відносно: $C = 600$, $D = 800$, $E = 240$.
 Норми витрат ресурсів наведено в таблиці 3.1.
 Прибуток від реалізації виробу А складає 40 у.о., В – 50 у.о.
 Знайти об'єм виробництва, що забезпечує максимальний прибуток.

Таблиця 4.1

Норми витрат ресурсів

	А	В
С	24	8
D	8	8
E	3	8

Побудова математичної моделі.

Позначимо $x_{1,2}$ – об'єми виробництва виробу А та В. Тоді прибуток фірми від реалізації x_1 виробу А та x_2 виробу В складатиме $W = 40x_1 + 50x_2$.

Обмеження G (область допустимих розв'язків), пов'язані із ресурсами та фізичним змістом змінних, мають вигляд:

$$\begin{cases} 24x_1 + 8x_2 \leq 600; \\ 8x_1 + 8x_2 \leq 480; \\ 3x_1 + 8x_2 \leq 240; \\ x_1 \in N_0, x_2 \in N_0, \end{cases}$$

де $N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. Знехтуємо умовою цілочисельності розв'язків, а залишимо умову їх невід'ємності, тобто розв'яжемо так звану послаблену задачу.

Математична постановка задачі: необхідно максимізувати показник ефективності

$$W = 40x_1 + 50x_2 \rightarrow \max_{x_{1,2} \in G}$$

за умови виконання записаних обмежень G . Як бачимо, задача лінійного програмування сформульована як симетрична задача лінійного програмування.

○ Знайдемо область допустимих розв'язків цієї задачі. Для цього розв'яжемо нерівності відносно змінної x_2 :

$$\begin{cases} x_2 \leq -3x_1 + 75; \\ x_2 \leq -x_1 + 60; \\ x_2 \leq -\frac{3}{8}x_1 + 30; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

Границі:

$$\begin{aligned} x_2 &= -3x_1 + 75, \\ x_2 &= -x_1 + 60, \\ x_2 &= -\frac{3}{8}x_1 + 30, \\ x_1 &= 0, x_2 = 0. \end{aligned}$$

Виконаємо побудову області допустимих значень (рис.4.2) та знайдемо положення основної прямої

$$W = 40x_1 + 50x_2 = 0 \Rightarrow l_0 : x_2 = -\frac{4}{5}x_1.$$

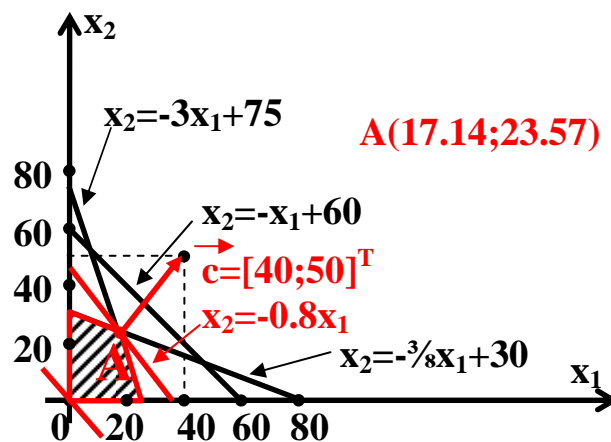


Рис. 4.2. Графічна ілюстрація знаходження області допустимих значень

Знайдемо W_{max} :

$$x_2 = -\frac{4}{5}x_1 + \left(\frac{W}{50}\right) = -\frac{4}{5}x_1 + W^*,$$

де W^* – відрізок, який пряма відтинає на осі ординат. Чим більше значення W^* , тим більше W тому, що $W^* = \frac{W}{50}$.

Знайдемо $(x_{1_{max}}, x_{2_{max}})$ як точку перетину границь:

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{3}{8}x_1 + 30, \\ x_2 = -3x_1 + 75, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 17\frac{1}{7} \approx 17,14, \\ x_2 = 23\frac{4}{7} \approx 23,57. \end{cases}$$

$$W_{\max} = 40 \cdot 17,14 + 50 \cdot 23,57 = 1864,1.$$

Обчислимо оптимальний розв'язок із урахуванням умови цілочисельності та невід'ємності змінних x_1 та x_2 (рис.4.3).

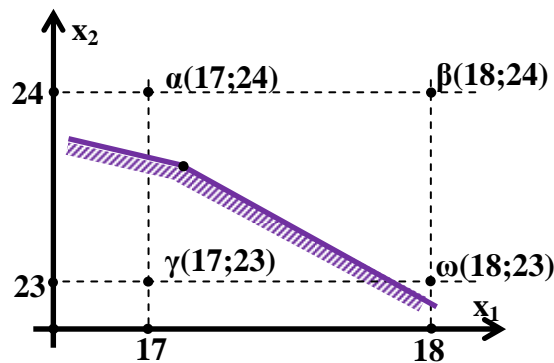


Рис. 4.3. Розташування оптимального розв'язку поблизу цілочисельних значень

З рисунку 4.3 (із результатів обчислення можливості попадання $\alpha, \beta, \gamma, \omega$ в область допустимих значень) отримаємо наступний результат: лише $\gamma(17,23)$ належить області допустимих значень, тобто

$$W_{\max} = 40 \cdot 17 + 50 \cdot 23 = 1830$$

і досягається це значення критерію при випуску продукції: 17 одиниць типу A і 23 одиниць типу B . ●

Приклад 4.2.

Знайти оптимальний розв'язок основної задачі лінійного програмування:

$$W = -5x_1 - 2x_2 - 18 \rightarrow \min_{x \in G},$$

де ОДР G задана наступними обмеженнями:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -5, \\ x_1 + x_2 - x_5 = -4, \\ x_2 + x_6 = 5, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_6 + 2x_7 = 7, \end{cases}$$

при умові, що $x_i \geq 0$ ($i = \overline{1,7}$), $X = [x_1, \dots, x_7]^T \in \mathbb{R}^7$.

○ Кількість керуючих змінних $n = 7$, а кількість обмежень-рівностей $m = 5$, тому $n - m = 7 - 5 = 2$. Отже, використаємо графічно-аналітичний метод розв'язання задачі лінійного програмування:

- побудуємо ОДР G ;
- графічним способом знайдемо точку, що відповідає мінімальному значенню критерію W (оптимальний розв'язок);
- обчислимо оптимальний розв'язок та мінімальне значення критерію.

1) Дослідження системи рівнянь на сумісність.

Із курсу лінійної алгебри відомо: для сумісності системи лінійних рівнянь необхідно і достатньо, щоб ранг матриці системи r_A дорівнював рангу розширеної матриці r_{AB} . Запишемо систему обмежень у матричному вигляді:

$$A \cdot X = B.$$

$$\text{де } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ -4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad [AB] = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ -4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

A – матриця системи, B – матриця вільних коефіцієнтів, $[AB]$ – розширена матриця системи.

Ранг матриці це найбільший порядок відмінного від нуля мінора:

$$\Delta_1 = 1 \neq 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 -$$

$$-1 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) \cdot 0 = 5 \neq 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-1)^{2+4} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Таким чином маємо, що

$$r_A = m = 5.$$

Визначників більшого порядку немає, тому що матриця A є прямокутною матрицею розміру 5×7 . Зрозуміло, що розширена матриця системи матиме розмір 5×8 , а це означає що найбільший порядок визначника розширеної матриці співпадає із найбільшим порядком визначника системи і дорівнює 5.

Висновок: $r_A = r_{AB} = 5$, система обмежень у формі рівностей сумісна.

2) Вибір вільних та базисних змінних.

Враховуючи той факт, що $n = 7$, $m = 5$, тобто $n - m = 2$, можливо обрати дві змінні, наприклад, x_1 та x_2 в якості вільних і 5 змінних x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 в якості базисних. Тоді із системи обмежень знаходимо:

$$\begin{cases} x_3 = -x_1 + x_2 + 4 \geq 0, \\ x_4 = 3x_1 - 2x_2 + 1 \geq 0, \\ x_5 = x_1 + x_2 + 4 \geq 0, \\ x_6 = -x_2 + 5 \geq 0, \\ x_7 = \frac{1}{2}(-2x_1 + 2x_2 + x_6 + 7) = -x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 6 \geq 0. \end{cases}$$

Враховуючи невід'ємність змінних будемо область допустимих розв'язків, аналітичний вираз для якої в залежності від змінних x_1 та x_2 має вигляд:

$$\begin{cases} x_2 \geq x_1 - 4, \\ x_2 \leq \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}, \\ x_2 \geq -x_1 - 4, \\ x_2 \leq 5, \\ x_2 \geq 2x_1 - 12, x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

Знайдемо положення основної гіперплощини:

$$W = -5x_1 - 2x_2 - 18 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{5}{2}x_1 - \frac{W + 18}{2};$$

$$\begin{cases} b = 0, \\ x_2 = -\frac{5}{2}x_1, \end{cases}$$

$\vec{c} = [-5, -2]$ – вектор градієнту.

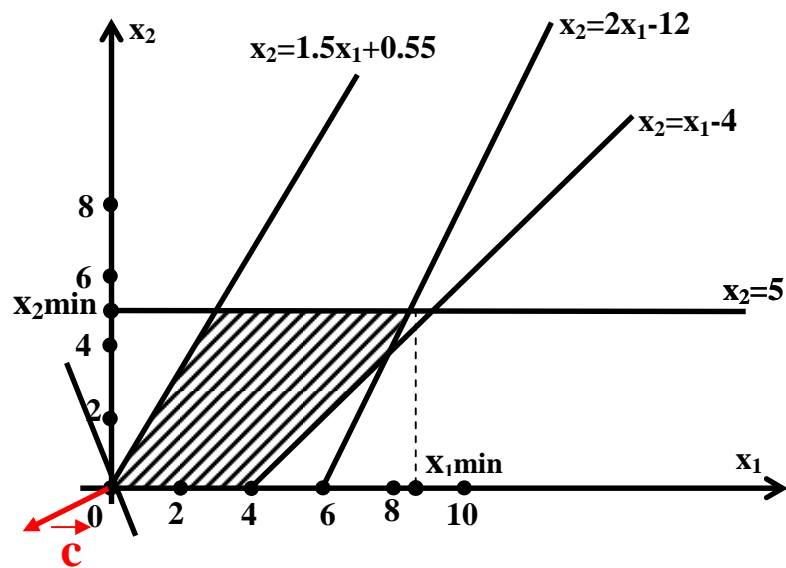


Рис. 4.4. Графічна ілюстрація побудови області допустимих розв'язків

Оптимальне (мінімальне) значення показника ефективності дорівнює:

$$W_{\min} = -70,5$$

і досягається це значення у точці $(x_{1\min}; x_{2\min}) = \{(8, 5; 5)\}$. ●

Висновок: наведена у п.4.3 геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування та приклади дозволяють стверджувати, що:

1) **Принцип 1.**

Оптимальний розв'язок, якщо він існує, розташований в одній із «опорних точок». За аналітичною ознакою опорна точка – це така точка, в якій хоча б $k = n - m$ (n - кількість невідомих, m - кількість сумісних обмежень рівнос-

тей) змінних перетворюються в 0. Геометрично опорна точка визначається як кутова точка ОДР G . Проілюструємо принцип 1 графічними образами (рис. 5.5) для випадку $k = n - m = 2$. Зрозуміло, що у загальному випадку, коли $k = 2$ всі змінні x_3, x_4, \dots, x_n можна виразити через x_1 та x_2 , що дозволяє критерій

$$W = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n$$

записати у вигляді:

$$W = \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 + \gamma_0.$$

Припустимо, що необхідно знайти оптимальне значення критерію W . Якщо $\gamma_0 = 0$, то основна пряма L_0 :

$$\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 = 0$$

проходить через початок координат.

Розглянемо за допомогою рисунків 5.5 а), б), в), г) напрямки переміщення цієї прямої в площині двох змінних x_1, x_2 , які дозволяють знайти найменше значення показника ефективності.

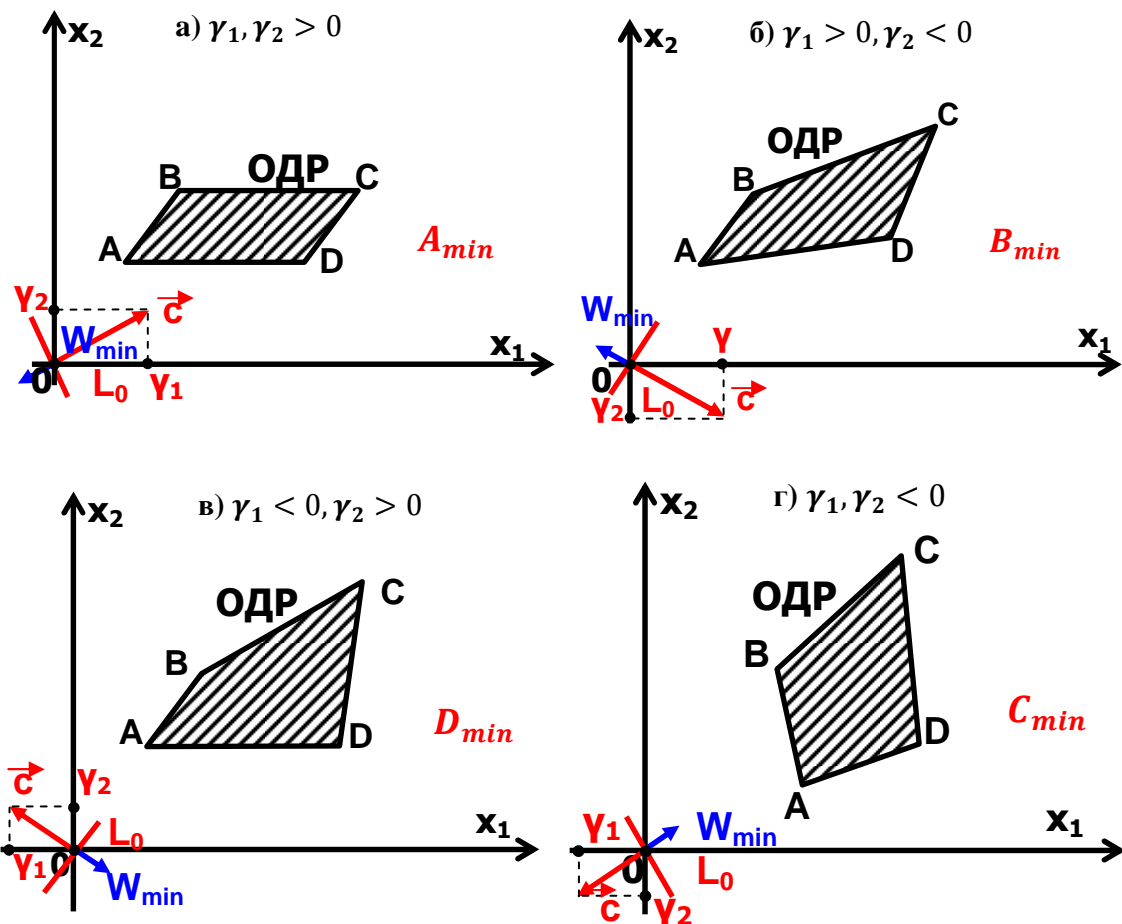


Рис. 4.5. Графічна ілюстрація положення основної прямої та напрямку її пересування при пошуку найменшого значення в точці, яка задовольняє область допустимих розв'язків

2) *Принцип 2.*

Для пошуку оптимального розв'язку необхідно переходити від однієї опорної точки до іншої, пересуваючись в напрямку зменшення або збільшення показника ефективності в залежності від вимог задачі лінійного програмування.

3) *Принцип 3.*

Застосування геометричного методу розв'язання задачі лінійного програмування ускладнюється, коли $n - m = 3$. Геометричний метод зовсім втрачає придатність до розв'язання практичних задач при $n - m > 3$. Тому, у довільному випадку застосовуються чисельні методи пошуку екстремуму показника ефективності, які ґрунтуються на записаних вище принципах (1) та (2).

Універсальним методом розв'язання задач лінійного програмування є **симплекс-метод**.