Фінансова математика фондового ринку

Лекція 1. Моделі зміни ціни грошей

Фінансова математика Фондового ринку

Моделі зміни ціни грошей

Фінансова математика Фондового ринку

Моделі зміни ціни грошей

Моделі зміни ціни грошей

- 1. Прості відсотки
- 2. Складні відсотки: періодичне нарахування.
- 3. Складні відсотки: неперервне нарахування.

ПРОСТІ ВІДСОТКИ

- **1.1. Три прості правила простих відсотків**
- **1.2. Ефективність інвестиції при простих відсотках**
- **1.3. Формула дисконтування**
- **1.4. Перпетуум**

Нехай деяка сума $V(0)=P$, яка називається *базовою*, вноситься на банківський рахунок. З плином часу ця сума збільшується згідно з формулою, яка визначається банком.

Розглянемо спосіб зміни базової суми, який називається

схемою простих відсотків.

За таким способом збільшення капіталу є пропорційним тривалості інвестування та базовій сумі.

1.1. ТРИ ПРОСТІ ПРАВИЛА ПРОСТИХ ВІДСОТКІВ

Три прості правила нарахування простих відсотків:

1) початковий капітал P є постійним;

2) капітал збільшується пропорційно P і тривалості інвестування;

3) збільшення капіталу є однаковим за однакові проміжки часу.

При нарахуванні простих відсотків сума на рахунку після першого року збільшиться на величину rP, де r – річна ставка простих відсотків, таким чином після першого року сума на рахунку становитиме:

$$V(1) = (1 + r)P.$$

Після другого року сума $V(1)$ знову збільшиться на ту саму величину rP та перетвориться на

$$V(2) = (1 + 2r)P.$$

Таким чином, згідно з правилом простих відсотків капітал інвестора у довільний момент часу t:

$$V(t) = \left(1 + tr\right)P.$$

Якщо нарахування відсотків здійснюється n раз на рік, тоді капітал інвестора у довільний момент часу t

$$V(t) = \left(1 + \frac{n}{365} r\right) P,$$

де

r	річна номінальна ставка простих відсотків
n	кількість періодів нарахування відсотків за рік
$1 + tr$	коефіцієнт росту (нарощення) для схеми простих відсотків

1.2. ЕФЕКТИВНІСТЬ ІНВЕСТИЦІЇ ПРИ ПРОСТИХ ВІДСОТКАХ

Нехай у момент s виконано певну інвестицію. Якщо розмір інвестиції дорівнює $V(s)$ і в момент $t > s$ вона призводить до капіталу $V(t)$, то ефективністю в момент t інвестиції, яку виконали в момент s називають число

$$K(s,t) = \frac{V(s,t) - V(s)}{V(s)}.$$

Ефективність також називають *коефіцієнтом повернення інвестиції*. У випадку простих відсотків ефективність дорівнює: $K(s,t) = (t-s)r$. Тоді відсоткову ставку можна визначити, якщо ефективність є відомою: $r = K(0,1)$.

Для схеми простих відсотків ефективність є адитивною, тобто

$$K(0,t) = K(0,s) + K(s,t),\ s < t.$$

.

1.3. ФОРМУЛА ДИСКОНТУВАННЯ

Відсотковий прибуток, який виплачується на початку кожного періоду нарахування відсотків (авансовий відсотковий прибуток), називають також *дисконтом.* Тоді число $V(0)$, що обчислюється за формулою:

$$V(0) = \frac{V(t)}{1 + rt}$$

називається *дисконтним значенням*, а *коефіцієнтом дисконтування* називається вираз

$$(1 + rt)^{-1}$$

Дисконт суми $V(t)$:

$$D(t) = V(t) - V(0).$$

1.4. ПЕРПЕТУУМ

У світі існують облігації, головним чином державні (наприклад, *британські консолі*), які не мають терміну обертання. Їх власник отримує постійний щорічний дохід протягом необмеженого періоду часу.

Послідовність грошових виплат однакового фіксованого розміру, які проводяться через рівні проміжки часу і продовжуються «нескінченно», називаються *перпетуумом*. Вважається, що виплати проводять з банківського рахунку, для якого діє формула простих відсотків.

Нехай розмір кожної виплати дорівнює C та виплати виконуються один раз на рік. Для того, щоб забезпечити такий перпетуум необхідно інвестувати $P = \frac{C}{r}$ у.о., де $r-$ відсоткова ставка. Дійсно такий депозит буде давати кожен рік $rP = C$ у.о.

СКЛАДНІ ВІДСОТКИ: ПЕРІОДИЧНЕ НАРАХУВАННЯ

2.1. Три прості правила складних відсотків

2.2. Формула дисконтування

2.3. Ефективність для складних відсотків, які нараховуються періодично

2.1. ТРИ ПРОСТІ ПРАВИЛА НАРАХУВАННЯ СКЛАДНИХ ВІДСОТКІВ

Три прості правила нарахування складних відсотків:

1) відсотки нараховуються m раз на рік із відсотковою ставкою r;

2) початковий капітал P збільшується за кожний період на величину відсотків;

3) відсотки за кожний період складають $\frac{r}{m}P$.

Наприклад, якщо періодичність для нарахування складних відсотків – один місяць, то після першого місяця відсотки інвестора складатимуть $\frac{r}{12}P$, а базова сума стає рівною $V(1)=\left(1+\frac{r}{12}\right)P$.

Після другого місяця відсотки інвестора складають $\frac{r}{12}\left(1+\frac{r}{12}\right)P$, а базова сума стає рівною $V(2)=\left(1+\frac{r}{12}\right)^2 P$.

Після 2-х місяців капітал інвестора стане рівним

$$P+\frac{r}{12}P+\frac{r}{12}\left(1+\frac{r}{12}\right)P=\left(1+\frac{r}{12}\right)^2 P. \qquad (1)$$

Таким чином капітал інвестора через n місяців становитиме

$$\left(1+\frac{r}{12}\right)^n P. \qquad (2)$$

Якщо нарахування відсотків здійснюється m раз на рік, тоді капітал інвестора у довільний момент часу t

$$V(t)=\left(1+\frac{r}{m}\right)^{tm}P \qquad (3)$$

де r – річна номінальна ставка складних відсотків,

t – кількість років, які відбувається нарахування відсотків,

m – кількість періодів нарахування відсотків за рік

$m=4 \Rightarrow$ нарахування відбувається щоквартально,

$m=12 \Rightarrow$ нарахування відбувається щомісяця,

$m=365 \Rightarrow$ нарахування відбувається щодня.

Множник $\left(1+\frac{r}{m}\right)^{tm}$ називається *коефіцієнтом росту складних відсотків, що нараховуються періодично*.

Якщо інвестиція суми $V(s)$ здійснюється в момент $s > 0$, то правило зростання капіталу по схемі складних відсотків, що виплачуються періодично, має вигляд:

$$V(s,t) = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{(t-s)m} V(s), \ t > s.$$

Іноді інвестору необхідно визначити свій капітал у моменти між послідовними виплатами. Наприклад, яким є капітал після 10 днів інвестування 100 у.о. під 12%, якщо виплати виконуються щомісячно? Одна з можливих відповідей: капітал дорівнює 100 у.о., оскільки перша виплата відбудеться лише через один місяць.

2.2. ФОРМУЛА ДИСКОНТУВАННЯ

Формула для обчислювання дисконтного значення $V(t)$ при складних відсотках, які нараховуються періодично:

$$V(0)=V(t)\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-tm}$$

Якщо зафіксувати $V(t)$, то $V(0)$ збільшується, якщо зафіксувати будь-який з параметрів r, t або m, то $V(0)$ зменшується, а інші не змінюються.

Коефіцієнт дисконтування для періодичних відсотків дорівнює:

$$\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-tm}$$

Значення $V(s)$ при заданому $V(t)$, $s<t$, визначається за формулою

$$V(s)=V(t)\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-(t-s)m}$$

2.3. ЕФЕКТИВНІСТЬ ДЛЯ СКЛАДНИХ ВІДСОТКІВ, ЯКІ НАРАХОВУЮТЬСЯ ПЕРІОДИЧНО

Ефективність для схеми складних відсотків, що виплачуються періодично, має вигляд:

$$K(s, t) = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{(t-s)m} - 1. \qquad (4)$$

У частинному випадку

$$K\left(0, \frac{1}{m}\right) = \frac{r}{m}.$$

Ефективність схеми періодичних відсотків є вищою ніж ефективність схеми простих відсотків.

На відміну від схеми простих відсотків адитивність при складних відсотках не є адитивною.

СКЛАДНІ ВІДСОТКИ:

НЕПЕРЕРВНЕ НАРАХУВАННЯ

Якщо частота нарахування відсотків прямує до нескінченності, то говорять про неперервне нарахування відсотків. Тоді капітал інвестора у момент t дорівнює

$$V(t) = e^{t\delta} P,$$

де δ – неперервна ставка відсотків або сила росту, $e^{t\delta}$– коефіцієнт росту неперервних складних відсотків.

Зв’язок між дискретною та неперервною ставками складних відсотків: $(1+r)^t = e^{t\delta} \Rightarrow \delta = \ln(1+r)$.

Ефективна ставка для неперервних складних відсотків $r_{ef} = e^{\delta} - 1$.

Можливе порівняння формул складних відсотків. Два методи, основані на формулі складних відсотків, називаються ***еквівалентними***, якщо коефіцієнти росту за однаковий період рівні між собою. Якщо один із коефіцієнтів переважає інший, то відповідний метод ***є більш переважаючим.***

.

Дякуємо за увагу!