Фінансова математика фондового ринку

Лекція 2. Безризикові фінансові активи

Фінансова математика Фондового ринку

Безризикові фінансові активи

Безризикові фінансові активи

- Облігації: безризиковий актив
- Гроші як фінансовий актив

ОБЛІГАЦІЇ: БЕЗРИЗИКОВИЙ АКТИВ

1.1. Облігації з нульовим купоном

1.2. Облігації з купонами

1.3. Ціна облігації з купоном як функції від часу

Найпростішим прикладомцінних паперів є ***облігації***, які випускаються *емітентом*, або які купує *кредитор*. Для облігацій є характерною наявність фіксованої дати, коли емітент виконує свої зобов'язання перед кредитором.

Обов'язки емітента - повернення коштів, які передав йому кредитор у момент придбання облігації, та додаткової суми, яку виплачують кредитору за право користуванням його коштами. Ця додаткова сума визначається фіксованою відсотковою ставкою $r\%$ і обчислюється за правилом складних відсотків.

Прибуток від вкладу капіталу в облігації не залежить від зміни цін на ринку і тому є прогнозованим, тобто не ризиковим. Капітал, який вкладено в облігації називають ***безризиковим активом.***

1.1 Облігації з нульовим купоном

Облігація з нульовим купоном - найпростіший приклад облігації, при якому виплати відбуваються лише один раз, після чого облігація припиняє своє існування. Організація- емітент обіцяє обміняти облігацію на певну суму F (***номінал облігації***) у певний час T (***момент реалізації облігації***)

Зазвичай облігації можна придбати у будь-який час до її реалізації T, тому її ціну $B(t, T)$ потрібно знати у довільний момент $t \leq T$.

$$B(t, T)\begin{cases} F\left(1+\dfrac{r}{m}\right)^{-m(T-t)} & \text{- складні відсотки, періодичне нарахування} \\ Fe^{-r(T-t)} & \text{- складні відсотки, неперервне нарахування} \end{cases}$$

$B(0,T)$- ***початкова ціна облігації***;

$B(0,T)/F$ - ***це коефіцієнт дисконтування***;

$F/B(0,T)$- ***коефіцієнт росту для відповідного методу***.

Для обчислення поточної ціни облігації достатньо знати або коефіцієнт дисконтування, або коефіцієнт росту. Більш того відповідні відсоткові ставки також можна обчислювати за допомогою цих показників.

Але саме відсоткова ставка інтуїтивно є більш зрозумілим поняттям для інвестора.

Наприклад, інформація про те, що річна облігація номіналом 100$ коштує 92,59$ є менш зрозумілою інвестору, ніж інформація про те, що інвестиції приносять 8% річних.

1.2 Облігації з купонами

Облігації, за якими в додаток до номіналу регулярно виплачуються певні суми, називаються ***облігаціями з купонами***.

Як правило купони виплачуються один раз або двічі на рік, останній раз у момент реалізації. Власник облігації може продати її у будь-який момент.

Ціна облігації у момент продажу визначається її власником.

Розглянемо облігацію з номіналом $F = 100\$$ та реалізацією через 5 років, яка виплачує купони $C = 10\$$ щорічно. Така облігація створює потік виплат:

$$C, C, C, C, C+F.$$

Якщо відома відсоткова ставка $r = 12\%$, то ціна облігації визначається за формулою:

$$V(0) = Ce^{-r} + Ce^{-2r} + Ce^{-3r} + Ce^{-4r} + (C + F)e^{-5r} \approx 90,27.$$

Зауваження. Ціна облігації тим вища, чим нижча відсоткова ставка.

1.3 Ціна облігації з купоном як функція часу

Через рік, коли виплатили перший купон облігація як і раніше має номінал 100 $, але її реалізація настає через 4 роки. У цей час облігація генерує потік виплат *C, C, C, C+F*.

Такий потік виплат забезпечується сумою

$$V(1) = Ce^{-r} + Ce^{-2r} + Ce^{-3r} + (C+F)e^{-4r} \approx 91{,}78,$$

яка і є ціною облігації у момент $t=1$. Капітал інвестора, який вкладено в облігацію у момент $t=1$ дорівнює $C+V(1)$. Помітимо, що

$$C+V(1) = V(0)\,\mathrm{e}^{r}.$$

Протягом другого року зміни цін регулюватимуться формулою складних неперервних відсотків. Так після 6 місячного терміну ціна облігації стане рівною

$$V(1{,}5) = V(1)\,\mathrm{e}^{0{,}5r} = Ce^{-0{,}5r} + Ce^{-1{,}5r} + Ce^{-2{,}5r} + Ce^{-3{,}5r} \approx 97{,}45.$$

Через чотири роки облігація стане річною облігацією з нулевим купоном, номіналом 110$ і ціною $V(4) = 110e^{-r} \approx 97{,}56.$

ГРОШІ ЯК ФІНАНСОВИЙ АКТИВ

2.1. Пролонгація інвестицій

2.2. Пролонгація інвестиції в іншу облігацію

2.3. Пролонгація інвестиції в облігації з купонами.

Достатньо часто інвестиції на фінансових ринках реалізуються через фінансових посередників (наприклад, через інвестиційні банки), які діють за дорученням своїх клієнтів. Банк відкриває спеціальний рахунок кожному своєму клієнтові. Внесення заощаджень на цей рахунок означає, що клієнт купує відповідну кількість облігацій. Зняття заощаджень з рахунку рівносильне продажу частини облігацій. Таким чином, дохід інвестора формується не від банківського депозиту, а від операцій з облігаціями.

Довга позиція інвестора у банку означає купівлю облігацій (тобто внесок коштів на рахунок), а ***коротка*** - продаж облігацій (зняття заощаджень з рахунку).

Розглянемо інвестиції в облігації з нульовим купоном і номіналом F, які здійснюються через рахунок в банку-посереднику. Ціна облігації дорівнює $B(0,T)=e^{-rT}$ Інвестиція $A(0)$ у.о. в банківський рахунок означає придбання $A(0)/B(0,T)$ облігацій.

Тоді сума $A(0)$, внесена на рахунок у початковий момент, у момент $t \le T$ буде дорівнювати

$$A(t)=\frac{A(0)}{B(0,T)}\cdot B(t,T)=A(0)e^{rt}.$$

<u>Теорема 1</u>. Закон зміни капіталу при інвестуванні в облігації такий самий як і для складних відсотків, що виплачуються неперервно.

2.1 Пролонгація інвестиції

Інвестиція в облігацію існує протягом скінченого часу до моменту її реалізації. Вона закінчиться у момент часу T та перетвориться на суму $A(T) = A(0)\,\mathrm{e}^{rT}$ на рахунку у посередника. У цей момент можна продовжити таку можливість накопичення капіталу, реінвестувавши суму $A(T)$ в таку саму облігацію, але яка випускається у момент часу T, а реалізується в момент $T' > T$.

Зміна ціни нової інвестиції обчислюється за формулою:

$$A(t') = A(T)\,\mathrm{e}^{r(t'-T)} = A(\mathrm{T})\,\mathrm{e}^{-rT} \cdot e^{rt'} = A(0)e^{rt'},\ T \le t' \le T'.$$

<u>Теорема 2</u>. Закон зміни початкової інвестиції є незмінним з плином часу.

$$A(t) = A(0)e^{rt}, t \ge 0.$$

2.2 Пролонгація інвестиції в іншу облігацію

Другим способом пролонгувати інвестиції у момент T є внесок в аналогічні облігації, які як і початкові, випускаються у момент $t = 0$, але для яких термін реалізації настає пізніше T. Якщо у початковий момент інвестована сума $A(0)$ у.о. в облігації з номіналом $F = 1$, то в момент T інвестор має суму

$$A(T) = A(0)/B(0,T).$$

У цей момент інвестор може придбати облігацію з терміном реалізації $T' > T$. Ціна облігації у цей момент дорівнює $B(T, T')$, тому інвестор може її придбати $A(T) = A(0)/B(T,T')$ таких облігацій. Оскільки номінал «нових» облігацій також дорівнює 1, то така інвестиція у момент T' перетвориться у суму

$$\frac{A(T)}{B(T,T')} = \frac{A(T)}{B(0,T)B(T,T')} = \frac{A(T)}{B(0,T')} = A(0)\,\mathrm{e}^{rT'}$$

2.3 Пролонгація інвестиції в облігацію з купоном

Розглянемо інвестиції в облігацію з купонами. Для зпрощення вважаємо, що перший купон C виплачується через рік. У момент $t=0$ ми інвестуємо $A(0)$ у.о. і купуємо $A(T)=A(0)/V(0)$ облігацій з купоном, де $V(0)$ - це ціна облігації з купоном у момент $t=0$. Через рік капітал, який вклали в одну облігацію, складатиме

$$C+V(1)=V(0)e^{r},$$

де $V(1)$ - ціна облігації у момент $t=1$, що є еквівалентним однорічній облігації з нульовим купоном і номіналом $V(0)e^{r}$. Тому

$$A(1)=V(0)e^{r}\cdot\frac{A(0)}{V(0)}=A(0)e^{r}.$$

<u>Теорема 3</u>. За умови постійної відсоткової ставки, функція $A(t)$ не залежить ні від типу облігації, ні від способу пролонгації інвестиції.

Дякуємо за увагу!