Фінансова математика фондового ринку

Лекція 3. Ризикові фінансові активи

Фінансова математика Фондового ринку

Ризикові фінансові активи

Ризикові фінансові активи

- Акції
- Коефіцієнт повернення
- Акції: неперервний час
- Стратегія і портфель інвестора

АКЦІЇ

Акції (це, як правило цінні папери) випускаються організаціями (емітентами), які хочуть залучити додаткові фінансові кошти. При продажу акції, емітент отримує кошти, які використовує для своєї діяльності.

Покупці акцій (***інвестори***) стають співвласниками організації – емітента з правом приймати участь в діяльності цієї організації та отримувати дивіденди від цієї діяльності.

Ціна акції не є фіксованою величиною з плином часу. Прибуток від вкладу капіталу в акції є непередбачуваним, більш того, його величина може бути від'ємною, що є еквівалентним збитковості інвестора. Тому купівля акції є ризиковою операцією, а самі акції називаються ***ризиковими активами.***

Позначимо ціну акції у момент t через $S(t)$. Вважаємо, що ціна акції «сьогодні», тобто $S(0)$, є відомою усім інвесторам.

Ціна ж акції у майбутньому, тобто $S(t)$, $t > 0$, є невідомою і залежить від непередбачуваних обставин.

Таким чином, $S(t)$ є випадковою величиною і залежить від параметру ω, який ми інтерпретуємо як ***сценарій,*** за яким розвиваються події на фінансовому ринку. Зрозуміло, що $S(t) > 0$ для всіх $t \geq 0$.

$$S(t) : \Omega \to (0; \infty) \text{ для довільного } t.$$

Множина усіх Ω складається з усіх можливих сценаріїв. Будемо вважати, що час змінюється дискретно.

ПРИКЛАД. Розглянемо ринок, для якого можуть бути лише два сценарії розвитку: бум та регресія, які ми позначимо ω_1 та ω_2 відповідно. У початковий момент часу акція коштує 10$. Для першого сценарію її ціна зросте до 12$, а для другого - запада до 7$.

У цьому прикладі $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ та

Сценарії	$S(0)$	$S(1)$
ω_1	10$.	12$.
ω_2	10$.	7$.

КОЕФІЦІЄНТ ПОВЕРНЕННЯ

Динаміку цін зручно виражати через коефіцієнт повернення.

Означення 1. Коефіцієнтом повернення $K(n,m)$ на інтервалі $[n,m]$ називають випадкову величину

$$K(n,m)=\frac{S(m)-S(n)}{S(n)}.$$

Коефіцієнт повернення на інтервалі $[n-1,n]$ позначимо $K(n)$, тобто

$$K(n)=K(n-1,n)=\frac{S(n)-S(n-1)}{S(n-1)}.$$

Коефіцієнт повернення не є адитивним, тобто

$$K(1) + K(2) + \ldots + K(n) \neq K(0, n).$$

Якщо $n < m$, тоді коефіцієнти повернення пов'язані співвідношенням

$$1 + K(n, m) = (1 + K(n+1))(1 + K(n+2)) \cdot \ldots \cdot \; 1 + K(m) \; .$$

Якщо розподіл коефіцієнту повернення є відомою величиною, то можна знайти його математичне сподівання, яке і має назву очікуване повернення.

Очікуване повернення не є мультиплікативним. Якщо ж $K(n+1), \ldots, K(m)$ є незалежними випадковими величинами, то

$$E(1 + K(n, m)) = E((1 + K(n+1))E(1 + K(n+2)) \cdot \ldots \cdot E \; 1 + K(m) \; .$$

ПРИКЛАД. Нехай динаміку цін на акцію відображено в наступній таблиці:

Сценарії	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
ω_1	100	110	120
ω_2	100	105	100
ω_3	100	90	100

до того ж ймовірності сценаріїв дорівнюють $1/4, 1/4, 1/2$. Тоді

Сценарії	K(0)	K(1)	K(0,2)
ω_1	10%	9,09%	20%
ω_2	5%	-4,76%	0%
ω_3	-10%	11,11%	0%

$$E[\mathrm{K}(1)] \approx 0,25 \cdot 10\% + 0,25 \cdot 5\% - 0,5 \cdot 10\% \approx -1,25\%$$

$$E[\mathrm{K}(2)] \approx 0,25 \cdot 9,09\% - 0,25 \cdot 4,76\% + 0,5 \cdot 11,11\% \approx 6,64\%$$

$$E[\mathrm{K}(0,2)] \approx 0,25 \cdot 20\% + 0,25 \cdot 0\% + 0,5 \cdot 0\% \approx 5\%$$

Зрозуміло, що $1 + E[\mathrm{K}(0,2)] \neq (1 + E[\mathrm{K}(1)])(1 + E[\mathrm{K}(2)])$

АКЦІЇ: НЕПЕРЕРВНИЙ ЧАС

Позначимо через S_t ціну акції у момент часу t, тоді зміну ціни за час Δt буде $\Delta S_t = S_{t+\Delta t} - S_t$.

При малих Δt розглянемо прирости логарифмів цін:

$$R_t \stackrel{def}{=} \ln S_{t+\Delta t} - \ln S_t = \ln\left(1 + \frac{\Delta S_t}{S_t}\right) \approx \frac{\Delta S_t}{S_t}.$$

Ціна акції R_t є абсолютно випадковим явищем, на яке впливають багато різноманітних обставин. Тому в силу центральної граничної теореми R_t має бути гаусівською випадковою величиною.

Якщо вважати, що прирости незалежні; $E[R_t] = 0$; дисперсія $\mathrm{var}[R_t]$ пропорційна Δt, то в силу неперервності S_t та початкової умови $R_0 = 0$, процес $\ln \mathrm{S}_t$ є ***вінерівським процесом***, тобто

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} \approx \sigma \Delta w(t) \quad \text{або} \quad dS_t \approx \sigma S_t dw(t).$$

Більш реалістичною є ситуація, коли R_t має деякий невипадковий ***тренд***. Наприклад, інфляція с деяким коефіцієнтом росту вносить зміни до вартості акції. У випадку лінійного тренду (типу інфляції) маємо

$$R_t = c\Delta t + \sigma\Delta w(t),$$

тобто

$$\frac{S_t'}{S_t} \approx c\Delta t + \sigma\Delta w(t),$$

або

$$dS_t = S_t(cdt + \sigma dw(t)).$$

Це рівняння описує ціну акції: константа c називається ***коефіцієнтом повернення капіталу***, а σ називається ***коефіцієнтом впливу випадкових явищ на процес ціноутворення***.

СТРАТЕГІЯ І ПОРТФЕЛЬ ІНВЕСТОРА

Кожен інвестор вкладає свій капітал при купівлі акцій та облігацій, тобто ризикових та неризикових активів. Уявлення інвестора про вигідність таких операцій виражаються в його ***стратегії.*** Стратегією називається пара чисел (a_t, b_t), що залежать від часу.

У кожен момент часу t числа (a_t, b_t) — це частини капіталу інвестора, які вклали в акції та облігації.

Стратегію інвестора також називають його ***портфелем***. ***Величина*** портфелю визначається як число

$$V_t = a_t S_t + b_t B_t,$$

де S_t та B_t — це ціни однієї акції та однієї облігації у момент часу t.

У практичній діяльності на розмір портфеля впливають і самі операції купівлі/продажу, за які також потрібно платити.

Дякуємо за увагу!