Фінансова математика фондового ринку

Лекція 5. Модель ринку цінних паперів з одним періодом

Фінансова математика Фондового ринку

Модель ринку цінних паперів з одним періодом

Модель ринку цінних паперів з одним періодом

- Основні складові моделі
- Головні характеристики моделі
- Домінантна стратегія та цінова міра. Закон однієї ціни

ОСНОВНІ СКЛАДОВІ МОДЕЛІ

Ми розглядаємо просту модель функціонування ринку цінних паперів, яка називається моделлю з одним періодом (або моделлю з однією торговою сесією)

І. Основні складові моделі

M_1) Існує лише 2 моменти часу: початковий момент $t=0$ і кінцевий момент $t=1$, $\mathfrak{I}=\{0,1\}$.

M_2) Кількість сценаріїв зміни цін цінних паперів скінченна і дорівнює k: $\Omega=\{\omega_1,\dots,\omega_k\}$. Кожне $\omega_i\in\Omega$ інтерпретується як стан ринку цінних паперів в момент часу $t=1$, який невідомий інвестору у момент часу $t=0$ і стає відомим у $t=1$.

M3) На Ω задана ймовірнісна міра $P(\omega_i) > 0, \forall \omega_i \in \Omega$ та $\sum_{i=1}^{k} P(\omega_i) = 1$. Кожне число $P(\omega_i), \forall \omega_i \in \Omega$ означає ймовірність здійснення відповідного сценарію.

M4) Безризиковий актив $B_t, t \in \Im$ (банківський рахунок, облігація): $B_0 = 1$, $B_1 = B_1(\omega) \geq 1$, $\forall \omega \in \Omega$. Зміну $B_1 - 1 = r$ називають ***відсотковою ставкою.*** Для багатьох випадків B_1 вважається не випадковою. Крім того, ми вважаємо, що інвестору доступні будь-які розміри депозиту та кредиту.

M5) Ризиковий актив: вартості $N < \infty$ акцій в момент часу $t \in \Im$: $S_t = (S_1(t), \ldots, S_N(t))$. S_0 – відомі ціни акцій у момент $t = 0$, $S_n(1)$ – невідомі інвестору у момент $t = 0$ і стають відомим у $t = 1$. Тому ціни у $t = 1$ залежать від сценарію: $S_n(1) = S_n(1)(\omega)$.

M6) Ми вважаємо, що інвестор може купити або продати будь-яку кількість акцій, навіть дробову.

ГОЛОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ МОДЕЛІ

Стратегія (портфель) інвестора – вектор

$$H=(H_0,H_1,\ldots,H_N),$$

H_0 – кількість у.о. на рахунку (інвестиції у безризиковий актив), $H_n, n=1,\ldots,N$ – кількість n-ї акції. Складові вектора H можуть бути додатними і від'ємними числами: якщо $H_n<0$, інвестор продає H_n акцій n-го типу; $H_0<0$ означає кредит в банку, а $H_0>0$ – депозит.

Розмір (ціна, вартість) портфеля інвестора – число

$$V_t=H_0B_t+\sum_{n=1}^{N}H_nS_n(t),\ \ t\in\Im.$$

Ціна портфеля залежить від обраної стратегії. Зауважимо, що V_1 є випадковою величиною і тому $V_1=V_1(\omega_i),\ \omega_i\in\Omega.$

Дохід інвестора – випадкова величина

$$G = V_1 - V_0 = H_0 r + \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n,$$

де $\Delta S_n = S_n(1) - S_n(0)$. Зауважимо, що дохід може бути від'ємним (у цьому випадку говорять про збиток).

Іноді зручно нормувати розмір портфеля, щоб банківський рахунок був сталим. Тому розглядають ***нормовані характеристики моделі***

$S_n^*(t) = \dfrac{S_n(t)}{B_t},\ t \in \Im,\ n \in N -$ *нормовані ціни акцій,*

$V_t^* = \dfrac{V_t}{B_t} = H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(t),\ t \in \Im -$ *нормований розмір портфеля,*

$G^* = V_1^* - V_0^* = \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n^* -$ *нормований дохід*, де $\Delta S_n^* = S_n^*(1) - S_n^*(0)$.

ДОМІНАНТНА СТРАТЕГІЯ ТА ЦІНОВА МІРА. ЗАКОН ОДНІЄЇ ЦІНИ

Стратегія $\hat{H}$ називається ***домінантною,*** якщо

$$\exists \tilde{H} : \hat{V}_0 = \tilde{V}_0, \text{ але } \hat{V}_1(\omega) > \tilde{V}_1(\omega), \forall \omega \in \Omega..$$

Якщо існує домінантна стратегія, то існують два портфелі, які мають однакову ціну в момент $t=0$, але різні розміри в момент $t=1$.

Пошук домінантної стратегії спрощується, якщо використовувати наступний результат.

Твердження 1. *Домінантна стратегія існує тоді і тільки тоді, коли*

$$\exists H : V_0 = 0, V_1(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega..$$

Твердження 1 показує, що існування домінантної стратегії свідчить про економічну неспроможність моделі, оскільки в цьому випадку можна отримати гарантований додатний дохід, починаючи з нульового портфеля.

Твердження 2. *Домінантна стратегія існує тоді і тільки тоді, коли*

$$\exists H : V_0 < 0, V_1(\omega) \geq 0, \forall \omega \in \Omega.$$

Твердження 2 показує іншу суперечливість моделі за наявності домінантної стратегії: початкова ціна від'ємна, але кінцева ціна портфеля невід'ємна для всіх $\omega \in \Omega$.

Зазначені суперечливості моделі відсутні, якщо існує цінова міра.

Вектор $\pi = (\pi(\omega_1), ..., \pi(\omega_k))$ називається ***ціновою мірою***, якщо його координати $\pi_i = \pi(\omega_i) \geq 0, \forall i = \overline{1,k}, \sum \pi_i = 1$ та

$$V_0^* = E_\pi V_1^*(\omega) = \sum_{i=1}^{k} \pi_i V_1^*(\omega_i)$$

для довільної стратегії H.

Теорема 1. Цінова міра існує тоді і лише тоді, коли не існує домінантної стратегії.

Для пошуку цінової міри зручно користуватись наступним твердженням.

Твердження 3. *Міра* π *- цінова тоді і тільки тоді, коли* π *- ймовірнісна міра на* Ω*, для якої*

$$S_n^*(0) = E_\pi S_n^*(1) = \sum_{i=1}^k \pi_i S_n^*(1,\omega_i),\ n = 1,\dots,N.$$

Для моделі ринку цінних паперів виконується ***закон однієї ціни (ЗОЦ)***, якщо не існує двох різних стратегій $\hat{H}$ та $\tilde{H}$ таких, що $\hat{V}_1(\omega) = \tilde{V}_1(\omega), \forall \omega \in \Omega,$ але $\hat{V}_0 \neq \tilde{V}_0$.

Тобто не існує двох різних портфелей, які в момент $t=1$ мають однакові вартості при будь-яких сценаріях, але їх вартості в момент $t=0$ відрізняються.

ПРИКЛАД. Нехай $k=2,\ r=\frac{1}{9},$ ціни на акції задані у таблиці 5.1.

Таблиця 5.1

n	$S_n(0)$	$S_n(1)$	
		ω_1	ω_2
1	2	12	24
2	5	7	15

Покажіть, що існує домінантна стратегія. Що можна сказати про цінову міру для такої моделі?

Розв'язання: Переконаємось в існуванні домінантної стратегії. Згідно твердження 1 домінантна стратегія $H=(H_0,H_1,H_2)$ існує, якщо

$$\begin{cases} V_0 = H_0 + 2H_1 + 5H_2 = 0, \\ V_1(\omega_1) = H_0 + 12H_1 + 7H_2 > 0, \\ V_1(\omega_2) = H_0 + 24H_1 + 15H_2 > 0. \end{cases}$$

З 1 рівняння $H_0 = -2H_1 - 5H_2$. Тому отримаємо систему нерівностей

$$\begin{cases} H_1 > -\dfrac{1}{5}H_2, \\ H_1 > -\dfrac{5}{11}H_2. \end{cases}$$

Одним з розв'язків цієї системи є пара $H_1 = 1, H_2 = -1$ (встановлено графічно). Тоді $H_0 = -2H_1 - 5H_2 = 3$. Відповідна стратегія $H = (3,1,-1)$ є домінантною.

Згідно теореми 1 цінова міра не буде існувати. Покажемо це. За означенням $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ - цінова міра, якщо $\pi_1, \pi_2 \geq 0$, $\sum \pi_i = 1$ та

$$V_0^* = H_0 + 2H_1 + 5H_2 = \pi_1 \frac{9}{10}\left(H_0 + 12H_1 + 7H_2\right) +$$

$$+\pi_2 \frac{9}{10}\left(H_0 + 24H_1 + 15H_2\right).$$

Прирівняємо коефіцієнти при

$$\begin{cases} H_0 : \dfrac{9}{10}\pi_1 + \dfrac{9}{10}\pi_2 = 1 \\ H_1 : \dfrac{54}{5}\pi_1 + \dfrac{108}{5}\pi_2 = 2 \\ H_2 : \dfrac{63}{10}\pi_1 + \dfrac{27}{2}\pi_2 = 5 \end{cases}.$$

Утворена система не має розв'язків. Отже, цінової міри не існує.

Дякуємо за увагу!