Фінансова математика фондового ринку

Лекція 6. Модель Марковиця

Фінансова математика фондового ринку

Модель Марковиця

Модель Марковиця

- Коефіцієнт прибутку
- Ризик

КОЕФІЦІЄНТ ПРИБУТКУ

Нехай I_0 деяке інвестування у момент часу $t=0$. Це може бути депозит у банку, купівля акцій, тощо. ***Коефіцієнтом дохідності*** у момент часу $t=1$ називається

$$R = \frac{I_1 - I_0}{I_0},$$

де I_1- це капітал, який отримують від інвестування в момент часу $t=1$.

Якщо інвестиція є депозитом суми у банку, то

$$R = \frac{(1+r)I_0 - I_0}{I_0} = r,$$

де $r-$ відсоткова ставка банку.

Якщо $S(t)-$ ціна акції в момент t, то

$$R = \frac{S(1) - S(0)}{S(0)}.$$

Оскільки $S(1)$ є випадковою величиною, то і R є випадковою величиною також, тому можна говорити про математичне сподівання та дисперсію.

Означення 1. Середнім прибутком або очікуваним прибутком називається $E[R]$.

Якщо було проведено декілька інвестицій, то вони складають портфель інвестора.

Нехай інвестор має N активів, то величина портфелю інвестора у момент часу t дорівнює

$$V_t = \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(t).$$

Тут $S_1(0),\dots,S_N(0)$ початкові вартості акцій $H_1,\dots,H_N$.

Вагою активу у портфелі інвестора називається

$$w_n = \frac{H_n S_n(0)}{V_0}, \text{ де } V_0 = \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(0).$$

Зауважимо, що

$$w_1 + w_2 + ... + w_n = 1,$$

але деяка вага може бути від'ємною (це відповідає випадку $H_n < 0$, тобто випадку продажу відповідного актива). Коефіцієнтом дохідності портфелю називається

$$R = \frac{V_1 - V_0}{V_0}.$$

Якщо позначити через R_n коефіцієнт дохідності акції n, $R_n = \frac{S_n(1) - \mathrm{S}_n(0)}{\mathrm{S}_n(0)}$, то

$$R = \frac{\mathrm{V}_1 - V_0}{\mathrm{V}_0} = \frac{1}{V_0}\sum_{n=1}^{N} H_n S_n(1) =$$
$$= \frac{1}{V_0}\sum_{n=1}^{N} H_n S_n(0)\frac{S_n(1) - S_n(0)}{S_n(0)} + \frac{1}{V_0}\sum_{n=1}^{N} H_n S_n(0) - 1.$$

Оскільки $\frac{1}{V_0}\sum_{n=1}^{N} H_n S_n(0) = 1$ та $\omega_n = \frac{H_n S_n(0)}{V_0}$, то

$$R = \sum_{n=1}^{N} \omega_n R_n.$$

Дохідність портфелю дорівнює зваженій сумі прибутку його активів, до того ж ваговими коефіцієнтами у цій сумі є ваги активів у портфелі. Тому

$$R = \sum_{n=1}^{N} \omega_n R_n .$$

А середній прибуток дорівнює:

$$E[R] = \sum_{n=1}^{N} \omega_n E[R_n].$$

Якщо у портфель інвестора присутній ще й банківський депозит, то

$$E[R] = r + \sum_{n=1}^{N} \omega_n E[R_n].$$

РИЗИК

- 2.1 Ризик портфелю інвестора
- 2.2 Ризик для моделі Марковиця

2.1 Ризик портфелю інвестора.

В економічній теорії ризиками вважають довільні відхилення від наміченого плану, навіть якщо вони ідуть на користь інвестору.

Означення 2. Ризиком інвестиції, що має коефіцієнт прибутку R, називається $\mathrm{var}[R]$.

Використання дисперсії як числової міри ризику пояснюється математичним змістом дисперсії як міри відхилення від середнього значення $\mathrm{E}[R]$. Чим більшою є дисперсія, тим більше відхилення від детермінованого значення, яким є $\mathrm{E}[R]$.

Часто замість дисперсії як числову характеристику ризику використовують середнє квадратичне відхилення $\sqrt{\mathrm{var}[R]}$. Середнє квадратичне відхилення є зручнішим за дисперсію тільки в одному випадку: воно виражається у тих самих одиницях, що і самі данні.

Ризик портфеля інвестора

$$\mathrm{var}[R] = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \omega_i \omega_j \,\mathrm{cov}[R_i R_j],$$

або

$$\mathrm{var}[R] = \sum_{i=1}^{N} \omega^2 \,\mathrm{var}[R_i] + \sum_{i \neq j}^{N} \omega_i \omega_j \,\mathrm{cov}[R_i R_j].$$

Перший доданок – це вагова сума ризиків активів, а другий – зважена сума коваріацій між активами.

2.2 Ризик для моделі Марковица.

Нехай портфель складається з двох ризикових активів та відсутні інвестиції в облігації. У цьому випадку ми говоримо про моделі Марковиця. Середні коефіцієнти прибутку та ризики позначимо через μ_i і σ_i^2 для $i = 1, 2$. Позначимо вагу першого активу через $1 - s$, а другого через s, тоді середній прибуток портфелю буде дорівнювати

$$\mu = (1 - s)\mu_1 + s\mu_2,$$

а його ризик

$$\sigma^2 = (1 - s)^2 \sigma_1^2 + s^2 \sigma_2^2 + 2s(1 - s)\rho\sigma_1\sigma_2,$$

де

$$\rho = cor[R_1, R_2] = \frac{\operatorname{cov}[R_1, R_2]}{\sqrt{\operatorname{var}[R_1] \operatorname{var}[R_2]}}.$$

У випадку некорельованих активів $\rho = 0$, отримуємо

$$\sigma^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)s^2 - 2\sigma_1^2 s + \sigma_1^2 = g(s).$$

Тоді мінімальне значення ризику дорівнює

$$\sigma_{\min}^2 = \min_s g(s) = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Зауважимо, що $0 < \sigma_{\min}^2 = \min_s\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\}$. Це означає, що існує стратегія, для якої ризик є меншим ніж ризик кожного активу. У частинному випадку, якщо $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, то ризик такої стратегії у двічі менший, ніж ризик кожного з активів.

Стратегія з мінімальним ризиком визначається вагами активів

$$s_{\min} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \quad 1 - s_{\min} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

У випадку абсолютно залежних активів $\rho = 1$ (вважаємо, що $\sigma_1 \neq \sigma_2$) маємо, що

$$\sigma^2 = ((\sigma_2 - \sigma_1)s + \sigma_1)^2.$$

Тому мінімальний ризик дорівнює $\sigma_{\min}^2 = 0$, та досягається при

$$s_{\min} = -\frac{\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1} < 0, \ 1 - s_{\min} = \frac{\sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1} > 0.$$

Це означає, що стратегія з мінімальним ризиком передбачає продаж другого активу.

У випадку абсолютно залежних активів $\rho = -1$ (вважаємо, що $\sigma_1 \neq \sigma_2$) маємо, що

$$\sigma^2 = ((\sigma_2 + \sigma_1)s - \sigma_1)^2.$$

Тому мінімальний ризик дорівнює $\sigma^2_{\min} = 0$, та досягається при

$$s_{\min} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} > 0,\ 1 - s_{\min} = \frac{\sigma_2}{\sigma_2 + \sigma_1} > 0.$$

Це означає, що стратегія з мінімальним ризиком передбачає купівлю обох активів.

ПРИКЛАД. Портфель складається з двох пакетів акцій вартістю 3000 грн. та 2000 грн. Очікуваний прибуток по першому пакету складає 12%, а по другому -16%. Якою є очікувана дохідність портфеля вцілому?

Розв'язання. Знайдемо вагу першого активу та другого. Для цього скористаємось формулами.

$$w_1 = \frac{H_1 S_1(0)}{H_1 S_1(0) + H_2 S_2(0)}, \quad w_2 = \frac{H_2 S_2(0)}{H_1 S_1(0) + H_2 S_2(0)}.$$

За умовою задачі $S_1(0) = 3000$, $S_2(0) = 2000$, $H_1 = H_2 = 1$, тоді

$$w_1 = \frac{H_1 S_1(0)}{H_1 S_1(0) + H_2 S_2(0)} = \frac{3000}{3000 + 2000} = 0,6;$$
$$w_2 = \frac{H_2 S_2(0)}{H_1 S_1(0) + H_2 S_2(0)} = \frac{2000}{3000 + 2000} = 0,4.$$

Оскільки $E[R_1] = 12\%$ та $E[R_2] = 16\%$, то

$$E[R] = \omega_1 E[R_1] + \omega_2 E[R_2] = 0,6 \cdot 12 + 0,4 \cdot 16 = 13,6.$$

ПРИКЛАД. У заданий момент часу акції першої та другої компанії коштують 50$ та 20$, а їх очікувані прибутки $\mu_1 = 12\%$ та $\mu_2 = 8\%$. Інвестор хоче придбати ці акції. Він робить внесок у акції кожної компанії у розмірі половини свого капіталу. Визначити середній прибуток портфеля та ризик кожної акції та портфеля вцілому, якщо коваріаційна матриця прибутку буде дорівнювати

$$\operatorname{cov}(R_1, R_2) = \begin{pmatrix} 0,06250 & 0,00375 \\ 0,00375 & 0,0225 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Середній прибуток портфеля визначається формулою: $\mu = (1-s)\mu_1 + s\mu_2$. За умовою $s = 1 - s = 0,5$, тоді $\mu = 0,5 \cdot 12 + 0,5 \cdot 8 = 10\%$. Ризик акції визначається величиною її дохідності $\sigma_1 = \sqrt{0,0625}$, $\sigma_2 = \sqrt{0,00225}$.

Знайдемо ризик портфеля: $\sigma^2 = (1-s)^2\sigma_1^2 + s^2\sigma_2^2 + 2s(1-s)\operatorname{cov}(R_1, R_2)$.

Маємо $\sigma^2 = (0,5)^2 0,0625 + (0,5)^2 \cdot 0,0225 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,00375 = 0,023125$. Ризик

дохідності портфелю дорівнює : $\sigma = \sqrt{0,023125} \approx 0,1521$.

Дякуємо за увагу!