Фінансова математика фондового ринку

Лекція 9. Арбітражна стратегія

Фінансова математика Фондового ринку

Арбітражна стратегія

АРБІТРАЖНА СТРАТЕГІЯ

- Арбітражна стратегія. Означення
- Приклади

АРБІТРАЖНА СТРАТЕГІЯ. ОЗНАЧЕННЯ

Існування домінантної стратегії є негативною характеристикою будь-якої моделі фінансового ринку. Розглянемо наступну небажану, але в меншій мірі за попередню, характеристику таких моделей .

Арбітражна стратегія – можливість на фінансовому ринку при нульовому портфелі безризиково отримати ненульовий дохід. При чому додатній дохід отримується із додатною ймовірністю.

Стратегія H називається ***арбітражною***, якщо виконуються умови

AS₁) $V_0 = 0,$

AS₂) $V_1 \geq 0, \ \forall \omega \in \Omega,$

AS₃) $E[V_1] > 0$.

Із умов **AS₂ - AS₃** $\Longrightarrow \ \exists \omega_0 : V_1(\omega_0) > 0.$

Моделі, для яких існують арбітражні стратегії, не можуть бути стійкими з економічної точки зору. Тому хороша теоретична модель не має допускати арбітраж. Одним із прикладів ринків, на яких не можна заробити капітал без початкового (ринок без арбітражу), слугує ринок, на якому пропонуються лише безризикові фінансові активи. У цьому випадку вважаємо, що $N = 0$ і портфель інвестора змінюється за правилом $V_t = H_0 B_t$. Тому з умови $V_0 = 0$ випливає, що $H_0 = 0$ і $V_1(\omega) = 0, \forall \omega \in \Omega.$.

Твердження 1. *Якщо існує домінантна стратегія, то існує арбітраж. Обернене твердження не завжди правильне.*

Умови **AS₁ - AS₃** можна переписати в термінах нормованого портфеля:

AS₁*. $V_0^* = 0,$

AS₂*. $V_1^* \geq 0, \forall \omega \in \Omega,$

AS₃*. $E[V_1^*] > 0$.

Інший критерій існування арбітражної стратегії можна виразити в термінах нормованого доходу:

Твердження 2. *Арбітражна стратегія існує* $\Leftrightarrow$ *існуєм стратегія* H*, для якої*

1) $G^*(\omega) \geq 0, \forall \omega \in \Omega,$

2) $E[G^*] > 0.$

Ймовірнісна міра Q на Ω називається ***нейтральною*** або ***нейтральною до ризику***, якщо

NM₁) $Q(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega,$

NM₂) $E_Q[\Delta S_n^*] = 0, \forall n = 1, 2, \ldots, N.$

Умова **NM₂** означає, що “середня” зміна цін на кожну акцію є нульовою по відношенню до міри Q. Іншими словами, якщо числа $Q(\omega) > 0$ були б ймовірностями сценаріїв $\omega \in \Omega$, то ціни акцій “в середньому” не змінились би, тобто ризик був би зведений “в середньому” до нуля.

Умова **NM₂** означає, що

$$S_n^*(0) = E_Q[S_n^*(1)],\ n = 1,\dots,N.$$

Остання рівність співпадає із означенням цінової міри. Але відмінність між ними є: $Q(\omega) > 0,\ \forall\omega\in\Omega,$

Теорема 1. Арбітражна стратегія не існує $\Leftrightarrow$ існує нейтральна міра.

Заважимо, що серед моделей фінансового ринку існують такі, для яких існує єдина нейтральна міра, існує нескінченно багато нейтральних мір та не існує жодної нейтральної міри.

ПРИКЛАДИ

ПРИКЛАД. Нехай $k = 2,\ N = 1,\ r = 0$ та ціни на акцію $S(0) = 10,\ S(1,\omega_1) = 12,\ S(1,\omega_2) = 10.$ Показати, що існує арбітражна стратегія, але не існує домінантної стратегії.

Розв'язання: За означенням арбітражної можливості

$$\begin{cases} V_0 = H_0 + 10H_1 = 0 \\ V_1(\omega_1) = H_0 + 12H_1 \ge 0 \\ V_1(\omega_2) = H_0 + 10H_1 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_0 + 10H_1 = 0 \\ H_0 + 12H_1 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_0 + 10H_1 = 0 \\ H_1 \ge 0 \end{cases}$$

Із умови **AS₃** означення арбітражної стратегії випливає, що нерівність в останній системі строга. Тому стратегія $H = (-10,1)$ - арбітражна, причому для неї $V_0 = 0$, $V_1(\omega_1) = 2$, $V_1(\omega_2) = 0$.

Відсутність домінантної стратегії доведемо за допомогою цінової міри. Згідно з теоремою: Цінова міра існує $\Leftrightarrow$ не існує домінантної стратегії. Рівність із означення цінової міри має вигляд

$$V_0 = \pi_1 V_1(\omega_1) + \pi_2 V_1(\omega_2) \Leftrightarrow 0 = \pi_1 \cdot 2 + \pi_2 \cdot 0.$$

Міра $\pi = (0,1)$ задовольняє останню умову, тому є ціновою. Отже, домінантної стратегії не існує.

ПРИКЛАД. Нехай $k=2,\ N=1,\ r=\dfrac{1}{9}$ та ціни на акцію $S(0)=7,\ S(1,\omega_1)=\dfrac{40}{3},\ S(1,\omega_2)=\dfrac{50}{9}.$ Встановити, чи має модель нейтральну міру.

Розв'язання: Запишемо нормовані характеристики моделі

$$S^*(0)=7\ \ S^*(1,\omega_1)=12,\ \ S^*(1,\omega_2)=5.$$

Згідно означення нейтральна міра має задовольняти умови

$$\begin{cases} Q_1>0, Q_2>0, \\ Q_1+Q_2=1, \\ 12Q_1+5Q_2=7. \end{cases}$$

Єдиним розв’язком системи є вектор $Q = \left(\frac{2}{7}, \frac{5}{7} \right)$.

Отже, нейтральна міра існує і єдина. Згідно теореми 1 арбітражної можливості модель не має.

ПРИКЛАД. Нехай $k = 3,\ N = 2,\ r = \frac{1}{9}$ та ціни на акції задані в таблиці 1

Таблиця 1

n	$S_n(0)$	$S_n(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
1	5	60/9	60/3	40/9
2	10	40/3	80/9	80/9

Показати, що не існує нейтральної міри. Зробити висновки.

Розв'язання:

Запишемо нормовані характеристики моделі

n	$S_n^*(0)$	$S_n^*(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
1	5	6	6	4
2	10	12	8	8

Нейтральна міра визначається із наступної системи

$$\begin{cases} Q_1 > 0,\ Q_2 > 0,\ Q_3 > 0, \\ Q_1 + Q_2 + Q_3 = 1, \\ 6Q_1 + 6Q_2 + 4Q_3 = 5, \\ 12Q_1 + 8Q_2 + 8Q_3 = 10. \end{cases}$$

Система має єдиний розв'язок

$$Q = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right).$$

Така міра Q є ціновою, але не нейтральною. Тому за теоремою 1 існує арбітражна можливість. З іншого боку, Q - цінова міра, тому домінантної стратегії не існує.

Дякуємо за увагу!