



Фінансова математика фондового ринку

Лекція 10. Контракти.



Фінансова математика фондового ринку

Контракти



Контракти

- Основні означення
- Парі
- Ринкові контракти
- Несправедлива ціна контракту
- Справедлива ціна контракту

ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ

Означення 1. *Контрактом на суму X називається договір, заключений в момент часу $t = 0$ між продавцем і покупцем (або інвестором), згідно з яким продавець в момент часу $t = 1$ зобов'язаний заплатити покупцю $X(\omega)$, де ω - це стан ринку при $t = 1$.*

В залежності від типу контракту одна зі сторін сплачує іншій встановлену суму в момент укладання договору.

Зауваження 1. Значення $X(\omega)$ для деяких сценаріїв ω можуть бути нульовими або навіть від'ємними. В таких випадках контракт передбачає, що виплати здійснює не продавець, а покупець контракту.

Таким чином, значення X (зобов'язання по контракту) не відомо в момент $t = 0$ оскільки залежить від сценарію ω , а задачею як продавця, так і покупця є оцінка значення і визначити “справедливу” ціну p контракту, якою будуть задоволені обидві сторони.

Ціна контракту – це сума, яку покупець контракту платить продавцю в момент $t = 0$.

Означення 2. Ми називаємо *справедливою* таку ціну контракту, при якій не існує можливості без ризкового способу отримання доходу від операції з контрактами, акціями і облігаціями. Часто виявляється, що така ціна єдина.

ΠΑΡΙ

Не обов'язково, щоб знак $X(\omega)$ був однаковий для всіх сценаріїв ω . Наприклад, одним з контрактів є **пари**. Пари для випадку $k = 2$ має такі виплати

$$X(\omega) = \begin{cases} a, & \omega = \omega_1, \\ -a, & \omega = \omega_2. \end{cases}$$

Тут a -це деяка сума, узгоджена сторонами пари в момент $t = 0$. Це число називається **“ставкою” пари**.

Сценарій ω_1 можна інтерпретувати, наприклад, як розвиток подій, при якому курс конкретної акції зростає. Тоді ω_2 означає, що курс цієї акції падає.

РИНКОВІ КОНТРАКТИ

Будемо інтерпретувати X як дохід інвестора, отриманий від контракту. В деяких випадках такий же дохід можна отримати, використовуючи облігації та акції.

Означення 3. Контракт X називається ринковим, якщо існує така стратегія H , для $V_1(\omega) = X(\omega)$ для всіх $\omega \in \Omega$. В такому випадку кажуть, що стратегія H генерує контракт X .

ПРИКЛАД 1.

Нехай, $k = 2$, $N = 1$, $r = 1$, а X -це пари з $a = 1$. Припустимо, що

$S_1(0)$	$S_1(1)(\omega_1)$	$S_1(1)(\omega_2)$
5	0.5	1.5

Так як $V_1 = H_0 \cdot B_1 + H_1 S_1(\omega)$ і детермінант системи

$$\begin{cases} H_0 \cdot 2 + H_1 \cdot 0.5 = 1 \\ H_0 \cdot 2 + H_1 \cdot 1.5 = -1 \end{cases}$$

не дорівнює нулю, тоді система має *єдиний розв'язок*

$$H_0 = 1, H_1 = -2.$$

Це означає, що пари є ринковим контрактом для такої моделі фінансового ринку. Стратегія $H = (1, -2)$ генерує парі.

НЕСПРАВЕДЛИВА ЦІНА КОНТРАКТУ

Нехай X – ринковий контракт, який генерується стратегією H . Припустимо, що p – ціна контракту в момент часу $t = 0$, причому $p > V_0$. В цьому випадку інвестор може застосувати наступний підхід: в момент $t = 0$

1. укласти контракт X за ціною p ; застосувати стратегію H .

Інвестор, який наслідує цей підхід, нічим не ризикує в момент $t = 1$ і отримує гарантований дохід $p - V_0$, так як в момент часу $t = 0$ він має дохід p від продажу контракту і витрати V_0 від застосування стратегії H , а в момент $t = 1$ він отримає дохід $V_1(\omega)$ від стратегії H , але його обов'язки по контракту складуть $X(\omega)$. Таким чином, загальний дохід від цієї операції дорівнює: $p - V_0 + V_1(\omega) - X(\omega) = p - V_0 > 0$.

ПРИКЛАД 2. (продовження прикладу 1).

Неважко обчислити, що

$$V_0 = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 5 = -9$$

для стратегії, яка генерує пари.

Ситуація, схожа на ту, яку ми розглянули при $p < V_0$, має місце і у випадку $p > V_0$. В такому випадку інвестор може застосувати такий підхід:

- 1. укласти контракт X за ціною p ;*
- 2. застосувати стратегію $-H$.*

Тоді в момент часу $t = 0$ витрати інвестора складуть p від покупки контракту і $-V_0$ від застосування стратегії $-H$. В момент часу $t = 1$ дохід складе $-V_0(\omega)$ від стратегії $-H$ і $X(\omega)$ від контракту. Таким чином дохід від цієї операції буде

$$-(p - V_0) + (-V_1(\omega) + X(\omega)) = V_0 - p > 0$$

СПРАВЕДЛИВА ЦІНА КОНТРАКТУ

У випадку $p = V_0$ стратегія H , яка генерує контракт X , вже не приносить без ризикового доходу.

Чи означає це, що V_0 є справедливою ціною контракту?

Не обов'язково. Наприклад, припустимо, що існує інша стратегія \hat{H} , яка також генерує X , тобто $\hat{V}_1(\omega) = X(\omega)$ для всіх сценаріїв $\omega \in \Omega$, але для якої $\hat{V}_0 \neq V_0$. Тоді, навіть у випадку $p = V_0$, у міркуваннях, проведених вище, можна використовувати стратегію \hat{H} замість H і здійснити одну з операцій, описаних вище, отримуючи дохід без ризику.

Таким чином, існують моделі фінансових ринків, на яких контракти не мають справедливої ціни. Ефект, подібний описаний вище, виникає, якщо для моделі фінансового ринку не виконується закон однієї ціни. Таким чином, щоб ціна контракту $p = V_0$ була справедливою, необхідно, щоб виконувався закон однієї ціни.

Дякуємо за увагу!

