Фінансова математика фондового ринку

Лекція 11. Повний та неповний ринок

Фінансова математика Фондового ринку

Повний та неповний ринок

Повний та неповний ринок

- Основні поняття
- Не ринкові контракти для неповних моделей

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

1.1 . Критерій ринковості контракту

1.2 Критерій повноти моделі

Означення 1. Модель називається ***повною***, якщо довільний контракт генерується певною стратегією. У протилежному випадку модель називається ***неповною***.

Твердження 1. ***Припустимо, що не існує арбітражної стратегії. Модель фінансового ринку є повною тоді і тільки тоді, коли кількість незалежних векторів у множині векторів-рядочків*** $\{B_1(\omega), \mathrm{S}_1(1)(\omega), \ldots, \mathrm{S}_N(1)(\omega)\}$, $\omega \in \Omega$ ***дорівнює*** $K = card(\Omega)$.

1.1. Критерій ринковості контракту

Позначимо через M множину нейтральних мір моделі. Будемо вважати, що $M \neq \varnothing$.

Твердження 2. ***Контракт*** X ***є ринковим тоді і тільки тоді, коли значення*** $E_Q[X / B_1]$ ***є однаковим для довільної нейтральної міри*** $Q \in M$.

1.2. Критерій повноти моделі

Твердження 3. ***Модель називається повною тоді і тільки тоді, коли*** M ***складається лише з однієї нейтральної міри.***

НЕ РИНКОВІ КОНТРАКТИ ДЛЯ НЕПОВНИХ МОДЕЛЕЙ

Якщо модель є повною, то справедлива ціна є відомою для довільного ринкового контракту, навіть якщо модель не є повною.

Далі ми розглядаємо не повну модель та не ринковий контракт. Нехай C- сукупність ринкових контрактів для даної моделі.

Для кожного контракту X визначимо число

$$V_+(X) = \inf\{E_Q[Y / B_1] : Y \geq X, Y \in C\}$$

Нерівність $Y \geq X$ означає, що $Y(\omega) \geq X(\omega)$ для всіх $\omega \in \Omega$.

Помітимо, що $E_Q[\mathrm{X} / \mathrm{B}_1]$ не залежить від Q, якщо $Y \in C$.

Величина

$$V_+(X) = \inf\{E_Q[Y / B_1] : Y \geq X, Y \in C\}$$

є верхньою оцінкою для справедливої ціни контракту X.

Дійсно, нехай ціна контракту X у момент часу $t = 0$ є такою, що

$$p > V_+(X).$$

Тоді розглянемо ринковий контракт Y, для якого $Y \geq X$ та

$$p > E_Q[X / B_1] \geq V_+(X)$$

Нехай H - стратегія, яка генерує Y.

Інвестор може застосувати такий підхід: у момент $t=0$ продати контракт X та застосувати стратегію H. Баланс доходів\витрат у момент $t=1$: $-X+V_1$. Так як $V_0 = E_Q[\mathrm{Y}_1 / \mathrm{B}_1]$ та $Y=V_1$, то загальний баланс є

$$p - E_Q[Y/B_1] - \mathrm{X} + \mathrm{Y} > 0.$$

Це означає, що на ринку існує безризикова можливість отримати додатній дохід, якого потрібно уникати.

Таким чином справедлива ціна не ринкового контракту не може бути більшою, ніж $V_+(X)$, інакше існує арбітражна стратегія

Аналогічно, справедлива ціна такого контракту не може бути меншою за $V_{-}(X)$, де

$$V_{-}(X) = \sup\{E_{Q}[Y / B_{1}] : Y \le X, Y \in C\}.$$

Ліва частина є визначеною, до того ж

$$V_{-}(X) \le \inf\{E_{Q}[\mathrm{X} / B_{1}] : \mathrm{Q} \in M\}.$$

Таким чином справедлива ціна контракту X має знаходитись в інтервалі $\left[V_{-}(\mathrm{X}), V_{+}(\mathrm{X})\right]$, тому границі цього інтервалу представляють виняткову зацікавленість для дослідження.

Сформулюємо теорему.

Теорема 1. Якщо $M \neq \varnothing$**, то для довільного контракту** X

$$V_+(X) = \sup\{E_Q[\mathrm{X}/\, B_1] : \mathrm{Q} \in M\},$$

$$V_-(X) = \inf\{E_Q[\mathrm{X}/\, B_1] : \mathrm{Q} \in M\}.$$

Якщо контракт є ринковим, то

$$V_+(X) = V_-(X).$$

ПРИКЛАД. Нехай $k = 3,\ N = 1,\ r = 1/9$.

ω	$S_1(0)$	$S_1(1)(\omega)$
ω_1	5	20\3
ω_2	5	40\9
ω_3	5	30\9

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} 10/9 & 20/3 \\ 10/9 & 40/9 \\ 10/9 & 30/9 \end{pmatrix}$$

має ранг 2, хоча card(Ω)=3, тому модель є неповною.

Нейтральні міри для цієї моделі мають вигляд

$$Q = (\lambda,\, 2 - 3\lambda,\, -1 + 2\lambda) \text{ для } 1/2 < \lambda < 2/3.$$

Справедлива ціна контракту X має вигляд

$$E_Q[\mathrm{X}/\,\mathrm{B}_1] = \lambda(9/10)\,\mathrm{X}_1 + (2 - 3\lambda)(9/10)\,\mathrm{X}_2 + (-1 + 2\lambda)(9/10)\,\mathrm{X}_3$$

Контракт X=(30,20, 10) не є ринковим. Для нейтральної міри маємо

$$E_{Q\lambda}[\mathrm{X}/\,\mathrm{B}_1] = 27 - 9\lambda.$$

Отже,

$$V_+(\mathrm{X}) = \sup_{1/2<\lambda<2/3} E_{Q\lambda}[\mathrm{X}/\,\mathrm{B}_1] = \sup_{1/2<\lambda<2/3} (27 - 9\lambda) = 22{,}5,$$

$$V_+(\mathrm{X}) = \inf_{1/2<\lambda<2/3} E_{Q\lambda}[\mathrm{X}/\,\mathrm{B}_1] = \inf_{1/2<\lambda<2/3} (27 - 9\lambda) = 21.$$

Дякуємо за увагу!