Фінансова математика фондового ринку

Лекція 12. Біноміальні моделі.

Фінансова математика Фондового ринку

Біноміальні моделі

Біноміальні моделі

- Означення моделі
- Коефіцієнт повернення та ризик інвестиції

ОЗНАЧЕННЯ МОДЕЛІ

1.1 Властивості біноміальної моделі

1.2 Арбітражна та домінантна стратегії

1.1 Властивості біноміальної моделі

Розглянемо більш детально найпростішу модель, яку називають біноміальною. Її перевагами є те, що умови існування арбітражної та домінантної стратегії, а також значення цін контрактів, можна записати у вигляді залежності між декількома параметрами біноміальної моделі.

Модель, відповідає випадку однієї акції , тобто випадку $N = 1, k = 2$. Оскільки у цій моделі вивчається лише одна акція, ми опускаємо індекс у процеса $S_1(t) = 0$. Ціна акції у момент $t = 1$ дорівнює

$$S(1)(\omega) = \begin{cases} S^u, \ \omega = \omega_1, \\ S^d, \ \omega = \omega_2. \end{cases}$$

Сценарії ω_1 та ω_2 інтерпритують я к ріст (бум) та спад (рецесія) економічної активності відповідно.

Згідно такої інтерпретації вважаємо, що $S^d < S^u$. Для біноміальних моделей процес $B(t)$ часто інтерпретується не як зміна банківського рахунку, а як зміни ціни облігації. З точки зору математичного аналізу економічних процесів така зміна термінології нічого не змінює, оскільки закон зміни цих процесів є однаковим

$$B(t) = (1 + r)B(t - 1).$$

Число $B(0)$ зараз інтерпритується як ціна облігації у момент $t = 0$ і тому не обов'язково дорівнює 1.

Ми також вважаємо, що існує нескінчений фінансовий ресурс, який дозволяє одержувати кредити. Зручно вважати, що цей ресурс є банківським рахунком, у якого відсоткова ставка співпадає з відсотковою ставкою облігації. Якщо дві ставки різні, то один з двох фінансових інструментів, облігація та банківський рахунок, використовуватись не будуть.

Якщо позначити $P(\omega_1) = p$ та $P(\omega_2) = 1 - p$, то процес S можна записати у наступному вигляді:

$$S(1)(\omega) = \begin{cases} S^u, \text{ з ймовірністю } p, \\ S^d, \text{ з ймовірністю } 1 - p. \end{cases}$$

1.2 Арбітражна та домінантна стратегії

Далі наведено умови існування та відсутності арбітражної та домінантної стратегій для біноміальної стратегії.

Твердження 1. ***Якщо***

$$S^d < (1+r)S(0) < S^u,$$

то не існує арбітражної стратегії

Твердження 2. Якщо виконується одна з двох умов

$$S^d = (1+r)S(0), \quad (1+r)S(0) < S^u;$$

$$S^d < (1+r)S(0), \quad (1+r)S(0) = S^u,$$

то існує арбітражна стратегія, але домінантна не існує.

КОЕФІЦІЄНТ ПОВЕРНЕННЯ ТА РИЗИК ІНВЕСТИЦІЇ

Якщо деяка інвестиція А(0), яку виконали в момент $t = 0$, перетвориться в суму А(1) у момент $t = 1$, то ***коефіцієнтом повернення інвестиції*** А називається

$$k_A = \frac{A(1) - A(0)}{A(0)}$$

Стратегія інвестора – це фактично його інвестиції у момент $t = 0$, які ми описуємо портфелем V_t, тому коефіцієнт повернення для усього портфелю інвестора обчислюється за формулою

$$k_V = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$$

Якщо повернення інвестиції залежить віл випадку, то потрібно розглядати очікуване повернення $\mathrm{E}[k_A]$. Відхилення повернення інвестиції від очікуваного повернення називається ***ризиком*** інвестиції. Як характеристику *ризи*ку ми обираємо середнє квадратичне відхилення $\sigma_A = \sqrt{var[k_A]}$.

ПРИКЛАД. Нехай $B(0) = 100$, $B(1) = 110$, $S(0) = 80$,

$$S(1) = \begin{cases} 100, & p = 0,8 \\ 60, & p = 0,2. \end{cases}$$

Інвестор має можливість інвестувати 10,000 у.о. у момент $t = 0$.

Одна з можливих його стратегій полягає:

1. в купівлі $H_0 = 60$ *облігацій за ціною 100 у.о. та*

2. $H_1 = 50$ *акцій за ціною 80 у.о.*

Тоді його початкова інвестиція дорівнює $V_0 = 10{,}000$, а портфель в момент $t = 1$

$$V_1 = \begin{cases} 60 \cdot 110 + 50 \cdot 100, & p = 0,8, \\ 60 \cdot 110 + 50 \cdot 60, & p = 0,2. \end{cases}$$

і коефіцієнт ефективності інвестиції дорівнюють

$$k_V = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = \begin{cases} 0{,}16, \ p = 0{,}8, \\ -0{,}04, \ \ p = 0{,}2. \end{cases}$$

Тому

$$E[k_V] = 0{,}16 \cdot 0{,}8 + (-0{,}04) \cdot 0{,}2 = 0{,}12,$$

тобто очікуваний коефіцієнт ефективності інвестиції дорівнює 12 %.

Ризик такої інвестиції дорівнює

$$\sigma_V = \sqrt{(0{,}16 - 0{,}12)^2 \cdot 0{,}8 + (-0{,}04 - 0{,}12)^2 \cdot 0{,}2} = 0{,}08.$$

Інший інвестор може також вибрати безризикову інвестицію, вкладаючи всі кошти в облігації.

В цьому випадку $H_0 = 100$, $H_1 = 0$, $\mathrm{E}[k_A] = k_V = 10\%$, $\sigma_V = 0$.

Нарешті, третій інвестор може обрати ризикову стратегію вкладаючи всі кошти в акції, тобто $H_0 = 100$, $H_1 = 125$,

$$V_1 = \begin{cases} 125 \cdot 100, & p = 0,8, \\ 125 \cdot 60, & p = 0,2. \end{cases}$$

$$E[k_V] = 0,15 = 15\%, \quad \sigma_V = 0,2 = 20\%.$$

Можливі й інші інвестиції, які мають свої ефективності та ризики.

При виборі стратегії інвестори керуються правилами, серед яких:

- якщо дві інвестиції дають однаковий повернення, то інвестор віддасть перевагу ту, у якій ризик менше;
- якщо дві інвестиції мають однаковий ризик, то інвестор віддасть перевагу ту, у якій вище очікуване повернення.

У розглянутому прикладі інвестиції з більш високими коефіцієнтами ефективностей мають і більш високі ризики.

У таких випадках вибір стратегії залежить від особистих переваг інвесторів.

Дякуємо за увагу!