



Фінансова математика фондового ринку

Лекція 13.
Модель Марковиця
з багатьма активами



Фінансова математика Фондового ринку

Модель
Марковиця з
багатьма
активами



МОДЕЛЬ МАРКОВИЦЯ З БАГАТЬМА АКТИВАМИ

- Основні означення
- Дохід та ризик портфелю
- Відповідність між вагами в портфелі та точками на площині
- Образ прямої на ваговій гіперплощині

ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ

Розглянемо загальний випадок моделі Марковиця з n різними ризиковими активами. Для зручності ми говоримо про акції, хоча це можуть бути і опціони, і портфелі інших інвесторів, і різноманітні контракти, і інші привабливі фінансові можливості.

Портфель інвестора, який включає декілька інвестицій в різні акції, можна описати за допомогою вагів

$$w_i = \frac{x_i S_i(0)}{V(0)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

де x_i — це кількість акцій i у портфелі, $S_i(0)$ — початкова ціна акції i , $V(0)$ — сума інвестицій у портфелі у початковий момент часу, n - кількість інвестицій (акцій) у портфелі.

Зрозуміло, що

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1. \quad (1)$$

Для подальшого викладення матеріалу зручно використовувати матричні позначення. Покладемо

$$w = [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_n], \quad (2)$$

і розглянемо матрицю

$$u = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1].$$

Тоді

$$uw^T = 1. \quad (3)$$

Означення 1. Допустимою множиною називається сукупність всіх портфелів інвестора (векторів виду (2)), що задовольняють умові (3). Будь-портфель, який задовольняє умові (3), називається допустимим.

ДОХІД ТА РИЗИК ПОРТФЕЛЮ

Позначимо доходи акцій, складових портфель, через K_1, \dots, K_n , а середні доходи - через μ_1, \dots, μ_n . Середні доходи будемо записувати у вигляді $1 \times n$ матриці

$$\mu = [\mu_1 \quad \mu_2 \quad \dots \quad \mu_n],$$

Коваріації між доходами K_i, K_j позначаємо через

$$c_{ij} = \text{cov}[K_i, K_j],$$

та розміщуємо їх у вигляді коваріаційної матриці

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Теорема 1. Нехай портфель V описується вагами (2), тоді його середній дохід та дисперсія дорівнюють

$$\mu_V = \mu w^T,$$

$$\sigma^2_V = w C w^T.$$

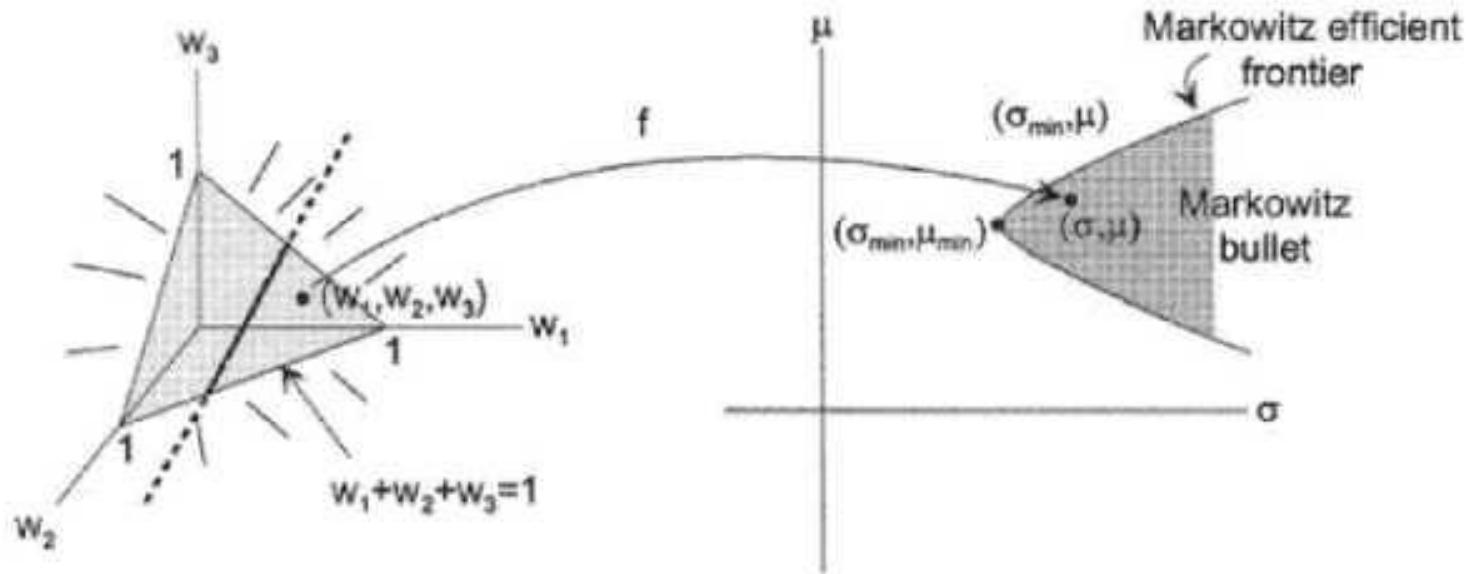
**ВІДПОВІДНІСТЬ МІЖ ВАГАМИ В
ПОРТФЕЛІ ТА ТОЧКАМИ НА
ПЛОЩИНІ**

На рисунку зображено відповідність між портфелями (сукупністю вагів активів, що утворюють портфель) і точками на площині $\mu - \sigma$

На лівій стороні рис. 1 показано n -мірний простір, $n = 3$, в якому "живуть" ваги w , які однозначно визначають портфелі. В силу умови (3) усі портфелі лежать на гіперплощині, яка визначається рівнянням

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1.$$

У разі $n = 3$ це рівняння визначає звичайну площину, яка проходить через точки $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ і $(0,0,1)$.



ОБРАЗ ПРЯМОЇ НА ВАГОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

Нашим завданням є визначити яким є образ прямої в площині $w_1 - w_2 - w_3$ при відображенні f .

Параметричне рівняння будь-якої прямої в n -вимірному просторі записується в такий спосіб

$$l(t) = At + B, \quad -\infty < t < \infty,$$

де $A = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n]$, $B = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n]$.

Зауважимо, що значення параметра $t = 0$ відповідає точці $l(0) = A$, а значення $t = 1$ - точці $l(1) = B$. Далі, для будь-якого портфеля на цій прямій

$$\mu = \mu w = \mu(At + B) = (\mu A)t + \mu B$$

тобто середній дохід лінійно залежить від параметра t , отримаємо

$$t = \alpha\mu + \beta$$

Тепер можемо отримати залежність σ^2 від параметра t :

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= wCw^T = (At + B)C(A^T t + B)^T = \\ &= (ACA^T)t^2 + (BCA^T + ACB^T)t + BCB^T = \\ &= \gamma t^2 + \delta t + \varepsilon.\end{aligned}$$

Отримуємо

$$\sigma^2 = \gamma(\alpha\mu + \beta)^2 + \delta(\alpha\mu + \beta) + \varepsilon.$$

Права частина останньої рівності є квадратичною функція від μ .

Таким чином, коли t змінюється від $-\infty$ до $+\infty$, а точки $l(t)$ пробігають пряму лінію в просторі $w_1 - w_2 - w_3$, відповідні точки (σ^2, μ) заповнюють параболу на площині $\sigma - \mu$. Тоді точки (σ, μ) задовольняють співвідношенню

$$\sigma = \sqrt{\gamma(\alpha\mu + \beta)^2 + \delta(\alpha\mu + \beta) + \varepsilon},$$

яке описує деяку криву на площині $\sigma - \mu$, яку називають **кривою Марковиця**. Відзначимо, що крива Марковиця не є параболою.

Розглянемо рішення наступних двох завдань:

(I) знайти портфель з найменшою дисперсією в допустимій множині

(3); будемо її називати **портфелем з мінімальною дисперсією**;

(II) знайти портфель з найменшою дисперсією в допустимій множині

(3) з додатковою умовою, що середній дохід дорівнює заданому

числу μ_V . Сімейство таких портфелів називається **лінією мінімальної**

дисперсії.

Зауваження 1. Оскільки стандартне відхилення є невід'ємним ,

$\sigma > 0$, і неперервно залежить від вагів, то мінімуми в обох задачах

існують.

Теорема 2. (портфель з мінімальною дисперсією). Розв'язок завдання (I), тобто портфель з мінімальною дисперсією, визначається вагами

$$w = \frac{u C^{-1}}{u C^{-1} u^T}.$$

Зауважимо, що знаменник в правій частині це число, яке дорівнює сумі компонент, чисельника.

Теорема 3 (лінія мінімальної дисперсії). Розв'язок завдання (II), тобто крива мінімальною дисперсією, визначається

$$w = \alpha \mu C^{-1} + \beta \mu C^{-1}, \text{ де}$$

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 1 & uC^{-1}\mu^T \\ \mu V & \mu C^{-1}\mu^T \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} uC^{-1}u^T & uC^{-1}\mu^T \\ \mu C^{-1}u^T & \mu C^{-1}\mu^T \end{vmatrix}}, \quad \beta = \frac{\begin{vmatrix} uC^{-1}u^T & 1 \\ \mu C^{-1}u^T & \mu V \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} uC^{-1}u^T & uC^{-1}\mu^T \\ \mu C^{-1}u^T & \mu C^{-1}\mu^T \end{vmatrix}}$$

за умови, що визначник в знаменниках обох рівностей не дорівнює нулю.

Дякуємо за увагу!

