Лекція 1. Матриці в задачах економічного змісту

Що таке матриці і якими вони бувають? Які дії можна виконувати над матрицями? Як використовуються матриці в задачах економічного змісту?

1.1. Поняття матриці. Класифікація матриць

Числовою матрицею розмірності $n \times k$ *називається* прямокутна таблиця чисел із n рядків та k стовбців. При цьому числа *називаються* **елементами матриці**, сукупність елементів, розташованих на вертикальній (горизонтальній) прямій складає **стовпець** або, що те ж саме, **вектор-стовпець** (**рядок** або ж **вектор-рядок**) матриці. Місце, на якому знаходиться кожен елемент матриці, визначається номерами рядка і стовпця, на перетині яких знаходиться цей елемент, відповідно, a_{ij} є елемент, що стоїть в i-му рядку та j-му стовпці, а сама матриця має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{Vmatrix}.$$

Квадратною матрицею порядку n *називається* матриця, у якої кількість рядків дорівнює кількості стовпців $(n = k)$. Для квадратних матриць елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ складають **головну діагональ**, а елементи $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots, a_{n1}$ – **побічну діагональ**.

Вектором-рядком *називається* матриця, яка має єдиний рядок $(n = 1)$:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \end{pmatrix}.$$

Вектором-стовпцем *називається* матриця, яка має єдиний стовпець:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix}.$$

Нульовою *<u>називається</u>* матриця (позначається O), в якій всі її елементи – нулі:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Діагональною *<u>називається</u>* квадратна матриця, в якій всі елементи, розташовані поза головною діагоналлю – нулі:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Одиничною *<u>називається</u>* діагональна матриця, всі елементи головної діагоналі якої дорівнюють одиниці, позначається E (або I):

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Симетричною *<u>називається</u>* квадратна матриця S, для всіх елементів якої S_{ij} виконується рівність $S_{ij} = S_{ji}$:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & & & \\ s_{1n} & s_{2n} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рівними *<u>називаються</u>* матриці A та B , якщо

а) вони мають однакову розмірність;

б) всі відповідні елементи цих матриць рівні: $a_{ij} = b_{ij}$.

1.2. Дії над матрицями

А) Транспонуванням матриць *<u>називається</u>* заміна її рядків на відповідні стовпці (що еквівалентно заміні стовпців на відповідні рядки):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \\ a_{1k} & a_{2k} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}.$$

Важливо!

<u>При транспонуванні</u>:

а) розмірність матриці змінюється з $n \times k$ на $k \times n$;
б) елементи головної діагоналі квадратних матриць залишаються незмінними;
в) симетричні матриці залишаються незмінними.

Приклад 1.2.1.

Транспонуємо матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Тоді

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Б) Додавання матриць. Сумою матриць A і B однакової розмірності *<u>називається</u>* матриця C такої ж розмірності, кожний елемент якої є сумою відповідних елементів матриць A і B:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix},$$

$$C=A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1k}+b_{1k} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2k}+b_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nk}+b_{nk} \end{pmatrix}.$$

Важливо!

<u>При додаванні</u>:

а) ***додавання матриць є комутативною операцією:*** $A+B=B+A$***;***

б) ***нульова матриця є нейтральним елементом при додаванні***: $A+O=A$

Приклад 1.2.2.

Додати дві матриці.

$$A+B=$$
$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+(-1) & 2+0 & 3+1 \\ 4+2 & 5+(-3) & 6+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

В) Добутком матриці на число <u>*називається*</u> матриця, всі елементи якої дорівнюють відповідним елементам вихідної матриці, помноженим на число:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}, \lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1k} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2k} \\ \vdots & & & \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nk} \end{pmatrix}.$$

Важливо!

При множенні матриці на число:

а) ***матриця*** $(-1)\cdot A = -A$ ***називається протилежною до матриці*** A, $A+(-A)=0$;

б) ***добуток матриці на число має розподільну (дистрибутивну)властивість:*** $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;

в) ***якщо*** $\alpha=0$, то $0\cdot A=O$.

Приклад 1.2.3.
Помножити матрицю на число. $$2A=2\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\\ -4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1 & 2\cdot(-2)\\ 2\cdot 0 & 2\cdot 3\\ 2\cdot(-4) & 2\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 0 & 6\\ -8 & 10\end{pmatrix}.$$

Г) Добутком матриць A, розмірності $m\times k$, та B, розмірності $k\times l$, кількість стовпців матриці A обов'язково дорівнює кількості рядків матриці B, тобто матриці є **узгодженими,** *називається* матриця C, кожний елемент c_{ij} якої є сума добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k}\\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mk}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l}\\ \vdots & & & \\ b_{k1} & b_{k2} & \ldots & b_{kl}\end{pmatrix},$$

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1l}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2l}\\ \vdots & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{ml}\end{pmatrix},$$

де $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ik}b_{kj}$, $1\le i\le m,\ 1\le j\le l.$

Важливо!

***<u>При множенні матриць</u>*:**

а) добуток будь-якої матриці на узгоджену з нею нульову є нульовою матрицею:

$$O\cdot A=A\cdot O=O;$$

б) добуток будь-якої квадратної матриці на узгоджену з нею одиничну матрицю дорівнює даній матриці:

$$E\cdot A=A\cdot E=A;$$

в) добуток матриць не є комутативним, тобто в загальному випадку $A\cdot B\neq B\cdot A$ ***(можливо навіть, що один з цих добутків існує, а інший – ні);***

г) мають місце рівності:

$$\alpha(A\cdot B)=\alpha A\cdot B=A\cdot(\alpha B),$$

$$A\cdot B\cdot C=(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C),$$

$$A(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$

(за умови, що всі відповідні додавання та множення матриць є допустимими);

д) має місце рівність для узгодження матриць:

$$(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T.$$

Приклад 1.2.4.

Перемножити матриці.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}\boxed{1\ \ 2\ \ 3}\\ 1\ \ 0\ \ -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&\boxed{4}&5\\6&\boxed{0}&-2\\7&\boxed{1}&8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot3+2\cdot6+3\cdot7 & \boxed{1\cdot4+2\cdot0+3\cdot1} & 1\cdot5+2\cdot(-2)+3\cdot8\\ 1\cdot3+0\cdot6+(-1)\cdot7 & 1\cdot4+0\cdot0+(-1)\cdot1 & 1\cdot5+0\cdot(-2)+(-1)\cdot8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}36&7&25\\-4&3&-3\end{pmatrix}.$$

1.3. Застосування матриць при розв'язанні економічних задач

Поняття матриць часто використовується в практичній діяльності. Наприклад, зручно записати у вигляді матриць данні про випуск продукції декількох видів у кожному кварталі року або норми витрат декількох видів ресурсів на виробництво продукції декількох типів, тощо.

Приклад 1.3.1.

У деякій галузі 4 заводи випускають 3 види продукції. Матриця $A_{4\times 3}$ задає об'єми продукції на кожному заводі в першому кварталі у гривнях, матриця $B_{4\times 3}$– відповідно в другому; (a_{ij}, b_{ij}) – об'єми продукції j-го типу на i-му заводі в 1-му та 2-му кварталах відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

А) об'єми продукції;

Б) прирости об'ємів продукції в другому кварталі порівняно з першим по видам продукції та заводам;

В) вартісний вираз випущеної продукції за півроку (в доларах), якщо λ - ціна одиниці об'єму продукції у доларах;.

Розв'язок.

А) *піврічний об'єм продукції* визначається сумою матриць A і B, тобто

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \\ 7 & 3 & 7 \end{pmatrix},$$

де $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ – об'єм продукції j-го типу, що виготовили за півроку i-м заводом.

Б) *приріст у другому кварталі по відношенню до першого* визначається різницею матриць:

$$D = B - A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Від'ємні елементи d_{ij} показують, що на даному заводі i об'єм виробництва j–го продукту зменшився, додатні d_{ij} – збільшився, нульові d_{ij} – не змінився.

В) добуток

$$\lambda C = \lambda(A + B) = \lambda \begin{pmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \\ 7 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

визначає вартість об'ємів виробництва за квартал у доларах по кожному заводу і кожному підприємству.

Приклад 1.3.2.

Підприємство виготовляє 3 типи продукції, кількості випущених одиниць продукції кожного типу задані матрицею $A_{1\times 3}$. Продукція реалізується в 4-х регіонах. Ціна реалізації одиниці i-го типу продукції в j-му регіоні задана матрицею $B_{3\times 4}$. Знайти C – матрицю виручки продукції по регіонам.

Нехай

$$A_{1\times 3} = (100 \quad 200 \quad 100); \;\; B_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

<u>Розв'язок</u>. *Виручка* визначається матрицею $C_{1\times k} = A_{1\times n} \cdot B_{n\times m}$, до того ж $c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} \cdot b_{ij}$ – це виручка підприємства в j-му регіоні:

$$C = A_{1\times 3} \cdot B_{3\times 4} = (100 \quad 200 \quad 100) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (600 \quad 1300 \quad 700 \quad 1300).$$

Контрольні запитання

1) Дайте означення матриці. Що називається її розмірністю, стовпцем, рядком?
2) Що таке квадратна, нульова, одинична матриці? Матриця-рядок? Матриця-стовпець?
3) Як виконується транспонування матриць? Як при цьому змінюються діагональна, симетрична матриці?
4) Що таке добуток матриці на число і матриці на матрицю? Коли дві матриці можна додати і як виконується ця операція?
5) В якому випадку дві матриці можна перемножити? Як виконується множення матриць? Які властивості цієї операції?