Лекція 2. Характеристики матриць

2.1. Означення визначника
2.2. Властивості визначників та їх обчислення
2.3. Ранг матриці та його обчислення
2.4. Обернена матриця

Що таке визначник? Для яких матриць і як його обчислюють? Властивості визначників, що полегшують їх обчислення. Ранг матриці та його зв'язок з визначниками. Що таке обернена матриця, коли вона існує і як обчислюється?

2.1. Означення визначника

Нехай $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - квадратна матриця порядку n.

Кожній такій матриці можна поставити у відповідність число, яке *називається* **визначником** або **детермінантом** матриці. При цьому використовується позначення:

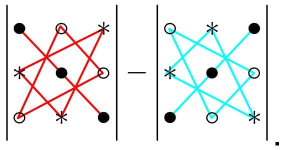
$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{vmatrix}.$$

Порядком визначника *називається* розмірність відповідної квадратної матриці, тобто визначник квадратної матриці n-го порядку є визначник є n-го порядку.

Розглянемо обчислення визначників у найпростіших випадках:

1. при $n=1$, $A=(a_{11})$, $detA = a_{11}$;
2. при $n=2$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $detA = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;
3. при $n=3$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,

$$detA = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{32} =$$



Для розгляду визначників вищих порядків корисні наступні поняття:

Мінором M_{ij} **порядку** $(n-1)$ **елемента** a_{ij} **квадратної матриці** A n**-го порядку** *називається* визначник матриці, отриманої викресленням з матриці A її i-го рядка та j-го стовпця:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1j} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2(j-1)} & a_{2j} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i(j-1)} & a_{ij} & a_{i(j+1)} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{nj} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$M_{ij}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Алгебраїчним доповненням (ад'юнктом) елемента a_{ij} **квадратної матриці** A n**-го порядку** *називається* число $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$;

Справджується наступна **теорема про розклад визначника за рядком (стовпцем).**

Теорема

Для кожної квадратної матриці A n***-го порядку при довільному*** i $(1 \le i \le n)$ ***виконано*:**

$$\det A = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}M_{ik} = \sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik};$$

та при довільному j $(1 \le j \le n)$ **—**

$$\det A = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}M_{kj} = \sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}.$$

Важливо!

Формула розкладу дозволяє:
а) використовувати для розкладу будь-який рядок (стовпець);
б) запроваджувати визначник n-го порядку індуктивно (тобто за допомогою визначників $(n-1)$ порядку), наприклад, визначник четвертого порядку – через визначник 3 порядку і т.д.

Приклад 2.1.1.

Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= (2\cdot(-3)-0\cdot 5) - 3((-1)\cdot(-3)-0\cdot 1) + ((-1)\cdot 5 - 2\cdot 1) =$$
$$= -6-9-7 = -22.$$

2.2. Властивості визначників та їх обчислення:

1) Визначник не змінюється при транспонуванні матриці:

$$|A| = |A^T|$$

(ця властивість означає рівноправність рядків та стовпців матриці).

2) Якщо поміняти місцями два рядки (стовпці) матриці, то він змінить свій знак на протилежний.
3) Визначник, який має два однакових рядки (стовпці), дорівнює нулю.
 Дійсно, відповідно до попередньої властивості, такий визначник не змінюватиметься при зміні знаку на протилежний.
4) Якщо елементи деякого рядка (стовпця) мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника.
5) Визначник, відповідні елементи двох рядків (стовпців) якого пропорційні, рівний нулю.
 Дійсно, така властивість випливає з послідовного застосування третьої та четвертої властивостей.
6) Якщо кожний елемент певного рядка (стовпця) є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких відповідні рядки (стовпці)

складені з доданків, а решта збігається з рядками (стовпцями) первинного визначника.

7) Визначник не змінюється, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати помножені на відповідний сталий множник відповідні елементи іншого рядка (стовпця).Ця властивість випливає з шостої та п’ятої.
8) Сума добутків елементів деякого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця), дорівнює нулю.
   Ця властивість випливає з третьої властивості та основної формули для обчислення визначників.
9) Визначник добутку матриць дорівнює добутку їх визначників.

Трикутною *називається* квадратна матриця, у якої всі елементи, розташовані нижче головної діагоналі (a_{ij} =0 при $i > j$) .

Важливо!

Як випливає з основної формули для обчислення визначників, визначник трикутної матриці дорівнює добутку її діагональних елементів.

Приклад 2.2.1.

Обчислити визначник.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 14 \\ 0 & 2 & 33 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-3) = -6.$$

Приміром,

Елементарними перетвореннями матриці будемо *називати* такі дії над матрицями, як транспонування, переміна місцями двох її рядків (стовпців), додавання до рядка (стовпця) іншого рядка (стовпця) помноженого на число.

Важливо!

Властивості визначників свідчать, що при здійсненні елементарних перетворень матриці її визначник змінює знак на протилежний або взагалі не змінюється. В той же час, за допомогою елементарних перетворень будь-яка матриця може бути зведена до трикутного вигляду, що радикально спрощує знаходження її визначника.

Цей метод знаходження визначників називається **методом елементарних перетворень** та в багатьох випадках є істотно менш трудомістким, ніж за допомогою використання основної формули.

Приклад 2.2.2.

Обчислити визначник методом елементарних перетворень.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 5 & -7 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{II} + (-4)\mathrm{I} \to \mathrm{II} \\ \mathrm{IIII} + (-5)\mathrm{I} \to \mathrm{IIII} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{III} + (-2)\mathrm{II} \to \mathrm{III} \\ \mathrm{IIII} + 2\mathrm{II} \to \mathrm{IIII} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{IIII} + 2\mathrm{III} \to \mathrm{IIII} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot (-2)(-14) = 28.$$

2.3. Ранг матриці та його обчислення

Проводячи елементарні перетворення матриці A (не обов'язково квадратної), можна зробити всі її рядки (стовпці), які є «комбінаціями» інших, нульовими. Якщо після цього викреслити всі нульові рядки та стовпці отриманої матриці, то залишиться квадратна матриця B.

Базисними рядками та **стовпцями** *називаються* відповідно рядки та стовпці, що належать, матриці B , а її порядок – **рангом матриці** A.

Ранг матриці можна визначити і іншим способом.

Мінором k-го порядку довільної матриці A *назвемо* визначник, складений з елементів, які стоять на перетині певних k стовпців та k рядків такої матриці. В такому випадку ранг матриці *визначається* як **найбільший порядок відмінного від нуля мінора** (отримане значення буде таким самим, як і попереднє). Цей мінор *називається* **базисним**

Для знаходження рангів матриць часто використовується також наступна **теорема про обвідні мінори**:

Теорема

Якщо матриця А містить мінор r-го порядку, який не дорівнює нулю, а всі мінори $(r+1)$-го порядку, що обводять цей мінор (містять всі його рядки та стовпці) дорівнюють нулю, то r є рангом матриці.

Приклад 2.3.1.

Обчислити ранг матриці.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Мінор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, всі мінори порядку 3 дорівнюють нулеві. Отже, $\operatorname{rang} A = 2$.

Важливо!

Якщо розглядати матрицю, складену з показників, які мають економічний зміст, то обчислення її рангу та, відповідно, знаходження базисної матриці B, має глибокий зміст. Ранг у цьому випадку, вказує на реальний об'єм інформації, що несе у собі дана матриця. Якщо матриця A має розмірність 5×4, тобто містить 20 показників, а її ранг дорівнює 3, то визначальними є $3\times 3=9$ показників. Елементи базисної матриці є тими параметрами системи, які, відповідно, визначають всі її характеристики.

2.4. Обернена матриця

Матрицею, оберненою до квадратної матриці A <u>*називається*</u> така матриця A^{-1}, для якої виконуються рівності:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Невиродженою *називається* матриця, визначник якої відмінний від нуля, інакше – **виродженою**.

Важливо!

Обернена матриця A^{-1} існує тоді і тільки тоді, коли A – не вироджена.

Властивості обернених матриць:

1) $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$;

2) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;

3) $\left(A \cdot B\right)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

4) $\left(A^{n}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{n}$.

Правило знаходження оберненої матриці:

Алгоритм

1) ***Знаходять визначник даної матриці, якщо він відмінний від нуля, то матриця невироджена, тобто має обернену;***
2) ***складають матрицю з алгебраїчних доповнень всіх елементів даної матриці;***
3) ***матрицю з алгебраїчних доповнень транспонують, кожний її елемент ділять на визначник даної матриці;***
4) ***перевіряють, чи дійсно є знайдена у попередньому пункті матриця є оберненою до даної, шляхом множення її на дану.***

Приклад 2.4.1.

Знайти обернену матрицю до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

1) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow$ матриця A має обернену(є невиродженою).

2)

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-5 & 2\\ -7 & 3\end{vmatrix}=-1,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}4 & 2\\ 5 & 3\end{vmatrix}=-2,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}4 & -5\\ 5 & -7\end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -7 & 3\end{vmatrix}=2,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{vmatrix}=1,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & -3\\ 5 & -7\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -5 & 2\end{vmatrix}=-1,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=0,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & -5\end{vmatrix}=2.$$

3)

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}-1 & -2 & -3\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 0\\ -3 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

4) Перевірка:

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 0\\ -3 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Отже, обернену матрицю знайдено вірно.

Контрольні запитання

1. Як обчислюються визначники другого і третього порядків?
2. Що таке мінор і алгебраїчне доповнення елемента матриці?
3. Запишіть формулу розкладу визначника за елементами рядка(стовпця).
4. Сформулюйте властивості визначників.
5. Що таке елементарні перетворення матриць? Як їх використовують для обчислення визначників? Чому дорівнюють визначники діагональної та трикутної матриць?
6. Що називають рангом матриці і як він може бути обчислений?
7. Що таке обернена матриця і для матриць вона існує? Наведіть її властивості.
8. Як обчислюється обернена матриця?