Лекція 3. Рівноважні моделі в економіці та системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР).

Що таке система лінійних алгебраїчних рівнянь? Як її записати за допомогою матриць? Що називається розв'язком такої системи і скільки розв'язків може мати система? Як знаходять розв'язки? Як можна узагальнити метод Гаусса? Якій множині належать розв'язки системи з n *невідомими? Як матриця діє на вектор?*

3.1. Загальні відомості

Системою n лінійних алгебраїчних рівнянь з k невідомими *називається* система вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nk}x_k = b_n \end{cases}.$$

Числа $a_{11},\ldots,a_{nk}$ *називаються* **коефіцієнтами системи,** праві частини рівнянь - $b_1,\ldots,b_n$ **– її вільними членами,** $x_1,\ldots,x_k$ **– невідомі.**

Розв'язати систему – *означає знайти всі такі впорядковані набори чисел* $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$, *які при підстановці їх замість* $x_1,\ldots,x_k$ *перетворюють всі рівняння системи на тотожності.*

Якщо запровадити матрицю:

$$A_{n\times k}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} \end{pmatrix},$$ та вектори-стовпці $$\bar{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}, \quad \bar{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$ то виникає можливість запису системи у **векторно-матричній формі**:

$$A_{n\times k}\cdot\bar{x}=\bar{b},$$

де рівність має сенс рівності відповідних матриць(вектор-стовпців)

Почнемо розглядати СЛАР із випадку, коли $n=k$, тобто матриця A є квадратною, кількості рівнянь та невідомих рівні.

3.2. Матричний метод

Якщо матриця A є невиродженою, то для розв'язання системи може бути використаний **матричний метод (метод оберненої матриці)**:

$$A\bar{x}=\bar{b}\Rightarrow A^{-1}A\bar{x}=A^{-1}\bar{b}\Rightarrow\bar{x}=A^{-1}\bar{b}\ .$$

Важливо!

До недоліків такого методу належать обмеженість сфери його використання (тільки квадратна і до того ж невироджена матриця A) та відносно великий об'єм обчислень.

Приклад 3.2.1.

Розв'язати систему $A\vec{x}=\vec{b}$, методом оберненої матриці, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -29 \neq 0,$$

то матриця A - невироджена. Знайдемо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -15, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -10,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Отже,
$$A^{-1} = \frac{1}{-29} \begin{pmatrix} -15 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -6 \\ 5 & -10 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{x} = -\frac{1}{29} \begin{pmatrix} -15 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -6 \\ 5 & -10 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix} = -\frac{1}{29} \begin{pmatrix} 29 \\ -87 \\ -145 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

3.3. Метод Крамера

Запровадимо матриці $A_1, A_2, \ldots, A_n$, які відрізняються від матриці А заміною у ній відповідно першого, другого і т. д. до n-го стовпців стовпцем вільних членів. Якщо позначити $|A| = \Delta$, $|A_1| = \Delta_1, |A_2| = \Delta_2, \ldots, |A_n| = \Delta_n$ і знову припустити, що $\Delta \neq 0$, то справедливі **формули Крамера**

$$x_1 = \Delta_1 / \Delta, \; x_2 = \Delta_2 / \Delta, \; \ldots \; x_n = \Delta_n / \Delta.$$

Важливо!

***Недоліки методу Крамера**, який полягає у знаходженні невідомих за цими формулами, ті ж, що й у матричного методу.*

В той же час, в процесі їх обґрунтування було доведено **теорему Крамера**:

Теорема Крамера

Якщо СЛАР має рівні кількості невідомих та рівнянь, то:

1) ***якщо Δ (головний визначник системи)$\neq 0$, то система має єдиний розв'язок (сумісна і однозначно розв'язана);***
2) ***якщо $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_n = 0$, то система має безліч розв'язків (сумісна і недовизначена);***
3) ***якщо $\Delta = 0$, а серед визначників $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ знайдеться хоча б один відмінний від нуля, то система не має розв'язків (є несумісною);***

Приклад 3.3.1.

Розв'язати методом Крамера СЛАР:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 5. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 9 - 1 - 1 - 6 + 15 = 26.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 5 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 45 + 1 - 5 - 15 = 26.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 5 & 5 \end{vmatrix} = -10 + 0 + 5 + 1 - 0 + 30 = 26.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 3 + 0 + 0 + 15 - 2 = 26.$$

$$x_1 = \Delta_1 / \Delta = 26/26 = 1,$$
$$x_2 = \Delta_2 / \Delta = 26/26 = 1,$$
$$x_3 = \Delta_3 / \Delta = 26/26 = 1.$$

3.4 Теорема Кронекера-Капеллі

Розглянемо загальний метод дослідження та розв'язання СЛАР. Нехай A^* є **розширена матриця системи**,

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} & b_k \end{pmatrix},$$

тоді справедлива **теорема Кронекера-Капеллі:**

Теорема Кронекера-Капеллі

Система лінійних алгебраїчних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранги її основної та розширеної матриць рівні.

3.5. Метод Гаусса

Вказана теорема дає можливість визначати сумісність довільної системи. Знаходження ж її розв'язків (єдиного чи нескінченної множини) можливе за допомогою **методу послідовного виключення невідомих – методу Гаусса. Алгоритм** цього методу складається з двох частин:

1) Прямий хід методу Гаусса полягає в одночасному визначенні рангів матриць A (основної) та A^* (розширеної) за допомогою **елементарних перетворень рядків:** припустивши, що елемент $a_{11} \neq 0$ (інакше здійснюється перестановка рядків), всі інші елементи першого стовпця A робляться нульовими шляхом додавання до відповідних рядків першого, помноженого на $\left(-\frac{a_{k1}}{a_{11}}\right)$, далі припускаємо, що $a_{22} \neq 0$ і повторюємо процедуру для другого стовпця і т. д. Після здійснення прямого ходу методу Гаусса, за допомогою теореми Кронекера-Капеллі, встановлюється тип системи.

Важливо!

Якщо $r(A) \neq r(A^*)$ - система несумісна, алгоритм обривається, якщо ж $r(A) = r(A^*) = k$, система має єдиний розв'язок, якщо ж $r(A) = r(A^*) = m < k$, то система має безліч розв'язків, її невідомі поділяються на m базисних та $(k-m)$ вільних.

Якщо розв'язків безліч, то базисними невідомими вважаються ті, стовпці яких належать до визначеного прямим ходом методу Гаусса ненульового мінора порядку m, решта невідомих – вільні – можуть приймати довільні дійсні значення незалежно одна від одної.

2) Зворотний хід методу Гаусса полягає у послідовному знаходженні значень невідомих (якщо система має єдиний розв'язок), або у послідовному вираженні базисних невідомих через вільні(якщо розв'язків безліч).

До переваг методу Гаусса належать його універсальність (можливість дослідження і розв'язання будь-яких СЛАР) та менша, порівняно з іншими методами, кількість обчислювальних операцій.

Приклад 3.5.1.

Дослідити на сумісність і знайти загальний розв'язок СЛАР:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18, \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

а) **Прямий хід:**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & -3 & 14 \\ -1 & -1 & 5 & -18 \end{array}\right) \begin{array}{l} \overleftarrow{b}_1 = \overleftarrow{a}_2 \\ \overleftarrow{b}_2 = \overleftarrow{a}_1 - 2\overleftarrow{a}_2 \\ \overleftarrow{b}_3 = \overleftarrow{a}_3 + \overleftarrow{a}_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & -7 & 7 & -35 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \overleftarrow{c}_2 = -\dfrac{1}{7}\overleftarrow{b}_2 \\ \overleftarrow{c}_3 = \overleftarrow{b}_3 + \dfrac{1}{7}\overleftarrow{b}_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \operatorname{rang} A = 3 \\ \operatorname{rang} \tilde{A} = 3 \end{array}$$

Отже, система має єдиний розв’язок.

Зворотній хід:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -3.$$

б) **Прямий хід:**

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \overleftarrow{b}_1 = \dfrac{1}{2}\overleftarrow{a}_1 \\ \overleftarrow{b}_2 = \overleftarrow{a}^2 - \dfrac{3}{2}\overleftarrow{a}_1 \\ \overleftarrow{b}_3 = \overleftarrow{a}^3 - \dfrac{9}{2}\overleftarrow{a}_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \dfrac{7}{2} & \dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} & 3 \\ 0 & -\dfrac{11}{2} & -\dfrac{5}{2} & \dfrac{1}{2} & -5 \\ 0 & -\dfrac{55}{2} & -\dfrac{25}{2} & \dfrac{5}{2} & -25 \end{array}\right) \begin{array}{l} \overleftarrow{c}_1 = \overleftarrow{b}_1 + \dfrac{7}{11}\overleftarrow{b}_2 \\ \overleftarrow{c}_2 = -\dfrac{2}{11}\overleftarrow{b}_2 \\ \overleftarrow{c}_3 = \overleftarrow{b}_3 - 5\overleftarrow{b}_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{11} & \frac{9}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{10}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \operatorname{rang} A = 2 \\ \operatorname{rang}\ \ A \mid \vec{b}\ \ = 2 \end{array}$$

x_1, x_2 - базисні змінні, x_3, x_4 - вільні змінні. Отже,

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{11} + \frac{1}{11}C_1 - \frac{9}{11}C_2, \\ x_2 = \frac{10}{11} - \frac{5}{11}C_1 + \frac{1}{11}C_2, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2, C_1, C_2 \in R. \end{cases}$$

3.6. Метод Йордана-Гаусса

Важливою модифікацією **методу Гаусса** є **метод Йордана-Гаусса**, що дозволяє одночасно здійснювати прямий та обернений ходи методу Гаусса.

Алгоритм перетворення Йордана-Гаусса

1) Вибирається елемент матриці системи $a_{ij} \neq 0$.

2) Елементи i-го (розв'язувального) рядка ділимо на a_{ij} і записуємо як i-й рядок розрахункової таблиці.

3) У j-му розв'язувальному стовпці розрахункової таблиці замість a_{ij} записуємо 1, замість решти елементів – нулі.

4) Решту елементів розрахункової таблиці знаходимо за формулами $\bar{a}_{ke} = \dfrac{a_{ij}a_{ke} - a_{kj}a_{ie}}{a_{ij}}$***,***

$1 \leq k \leq m,\ 1 \leq l \leq n.$

3.7. Застосування систем лінійних рівнянь при розв'язанні економічних задач

У цьому розділі ми розглянемо задачі, які зводяться до систем лінійних рівнянь та є типовими при прогнозах і оцінках функціонування підприємства, експертних оцінках проектів освоєння місцезнаходжень корисних копалин, а також планування мікроекономіки підприємств.

Приклад 3.7.1.

Фірма складається з двох відділень, загальна величина прибутку яких в минулому році склала 12 млн. грн. на цей рік заплановане збільшення прибутку першого відділення на 70%, другого на 40%. У результаті сумарний прибуток має зрости у 1,5 рази.

Яка величина прибутку кожного з відділень: а) минулого року; б) в цьому році?

Розв'язок. Нехай x та y – прибутки першого та другого відділень минулого року. Тоді умову задачі можна записати у вигляді системи:

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ 1,7x + 1,4y = 18. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримаємо $x = 4,\ y = 8$. Тоді прибуток минулого року першого відділення – 4 млн.грн., другого – 8 млн. грн.; прибуток в цьому році першого відділення $1,7 \cdot 4 = 6,8$ млн.грн., другого – $1,4 \cdot 8 = 11,2$ млн.грн.

I. Задача прогнозу випуску продукції. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

– матриця витрат сировини m видів, при виробництві n типів продукції. Тоді при відомих об'ємах запасів кожного виду сировини, які утворюють відповідний вектор $\overline{q} = (q_1,\ q_2, \dots, q_m)$, вектор-план $\overline{x} = (x_1,\ x_2, \dots, x_m)$ випуску продукції визначається з розв'язку системи m рівнянь з n невідомими:

$$A\overline{x}^T = \overline{q}^T.$$

Приклад 3.7.2.

Підприємство випускає три види продукції, використовуючи сировину трьох типів (див. табл. 1). Необхідно визначити об'єм випуску продукції кожного виду при заданих запасах сировини.

Табл.1

Вид сировини	Витрати сировини по видам, вага од./вир.			Запас сировини, вага од.
	I	II	III	
I	6	4	5	2400
II	4	3	1	1450
III	5	2	3	1550

Розв'язок. Позначимо невідомі об'єми випуску продукції через x_1, x_2, x_3 . Тоді за умови повних витрат запасів продукції для кожного виду сировини можна записати балансові співвідношення, які утворюють систему трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2400, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 1450, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1550. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -21; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2400 & 4 & 5 \\ 1450 & 3 & 1 \\ 1550 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3150;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 2400 & 5 \\ 4 & 1450 & 1 \\ 5 & 1550 & 3 \end{vmatrix} = -5250; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 2400 \\ 4 & 3 & 1450 \\ 5 & 2 & 1550 \end{vmatrix} = -2100.$$

Знаходимо, що при заданих запасах сировини об'єми випуску продукції по кожному виду , відповідно (в умовних одиницях),

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 150, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 250, \; x_1 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 100. \blacksquare$$

II. Балансові співвідношення. Для зручності будемо вважати , що виробнича область господарства являє собою n галузей, кожна з яких виготовляє свій однорідний продукт. Для забезпечення свого виробництва кожна галузь потребує продукцію інших галузей (виробниче споживання). Зазвичай процес виробництва розглядається за деякий період часу.

Введемо деякі позначення:

$x_i -$ загальний об'єм продукції i–ої галузі (її валовий випуск);

$x_{ij} -$об'єм продукції i–ої галузі, що споживає j–та галузь при виробництві об'єму продукції x_j;

$y_i -$об'єм продукції i–ої галузі, що застосовується для реалізації (споживання) в невиробничій галузі, або так званий продукт кінцевого споживання. До нього відноситься особисте споживання громадян, задоволення суспільних потреб, державних інститутів, тощо.

Балансовий принцип зв'язку різних галузей промисловості полягає в тому, що валовий випуск i–ої галузі має дорівнювати сумі об'ємів споживання у виробничій та невиробничих галузях. У самій простій формі балансові співвідношення мають вигляд:

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in} + y_i, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Це рівняння називають співвідношенням балансу

Контрольні запитання

1. Як записується СЛАР у векторно-матричній формі?
2. У чому полягає матричний метод розв’язання СЛАР? Які його недоліки?
3. У чому полягає метод Крамера розв’язання СЛАР? Сформулюйте теорему Крамера. Чому метод Крамера можна використовувати не для всіх СЛАР?
4. Сформулюйте теорему Кронекера-Капеллі.
5. У чому полягають прямий та зворотній ходи метода Гаусса?
6. У чому полягає особливість методу Йордана-Гаусса?