Лекція 4. Деякі додаткові питання теорії СЛАР

4.1. Арифметичний n-вимірний простір. Структура загального розв’язку СЛАР
4.2. Власні числа і власні вектори

Що таке арифметичний n-вимірний простір? Що таке власний вектор та власне число матриці? Як їх шукають?

4.1. Арифметичний n-вимірний простір. Структура загального роз’язку СЛАР

Арифметичним n-вимірним простором R^n <u>*називається*</u> сукупність усіх упорядкованих наборів з n дійсних чисел $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$, при цьому елементи такого простору <u>*називаються*</u> **n-вимірними векторами**, **n-розмірністю простору**, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ – **компонентами вектора**. При цьому:

а) **два n-вимірних вектори рівні** тоді і тільки тоді, коли у них рівні всі відповідні координати:

$$\overline{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}, \overline{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}, \ \overline{x} = \overline{y} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ \vdots \\ x_n = y_n \end{cases};$$

б) **сумою двох n-вимірних векторів** <u>*називається*</u> n-вимірний вектор, кожна компонента якого є сумою відповідних доданків компонента:

$$\begin{matrix} \overline{x} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\} \\ \overline{y} = \{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n\} \end{matrix}, \quad \overline{z} = \overline{x} + \overline{y} = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots, x_n + y_n\}.$$

в) **добутком вектора на дійсне число** <u>*називається*</u> вектор тієї ж розмірності, кожна компонента якого дорівнює відповідній компоненті вихідного вектора, помноженого на це число:

$$\overline{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}, \ \alpha\overline{x} = \{\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n\}.$$

Зазначимо, що:

1) операція додавання є комутативною

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x};$$

2) операція додавання є асоціативною

$$\overline{x} + \overline{y} + \overline{z} = (\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z};$$

3) операція множення на число також асоціативна

$$\alpha\left(\beta\overline{x}\right)=(\alpha\beta)\overline{x};$$

4) має місце дистрибутивна властивість

$$\alpha\left(\overline{x}+\overline{y}\right)=\alpha\overline{x}+\alpha\overline{y};$$

5) існують нульовий елемент $0=\{0;0;\ldots;0\}$ та протилежний $(-\overline{x})$ елемент для довільного елемента $\overline{x}$:

$$\overline{x}+\left(-\overline{x}\right)=0;$$

6) $1\times\overline{x}=\overline{x}$ для будь-якого вектора $\overline{x}$.

Лінійним простором <u>*називається*</u> сукупність елементів, для яких визначені дії *а), б), в)* та мають місце властивості 1) – 6) .
Як для n-вимірних просторів, так і для лінійних просторів взагалі, має місце наступне поняття:

Лінійною комбінацією елементів <u>*називається*</u> елемент $x=\alpha_1\overline{x_1}+\ldots+\alpha_m\overline{x_m}$, де $\overline{x_1},\ldots,\overline{x_m}$ – елементи простору, а $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ – дійсні числа, числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ - <u>*називаються*</u> **коефіцієнтами лінійної комбінації.**

Лінійно незалежними <u>*називаються*</u> вектори $\overline{x_1},\ldots,\overline{x_m}$, для яких з рівності їх лінійної комбінації нулю випливає рівність нулю всіх її коефіцієнтів, якщо ж знайдуться такі коефіцієнти $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$, які не всі рівні нулю, і в той же час $\alpha_1\overline{x_1}+\ldots+\alpha_m\overline{x_m}=\overline{0}$, то $\overline{x_1},\ldots,\overline{x_m}$ <u>*називаються*</u> **лінійно залежними**.

Можна показати, що:

а) якщо вектори лінійно залежні, то принаймні один з них може бути виражений через решту (записаний як їх лінійна комбінація);

б) якщо серед елементів $\overline{x_1},\ldots,\overline{x_m}$ є нульовий, то вони лінійно залежні;

в) якщо частина векторів серед $\overline{x_1},\ldots,\overline{x_m}$ лінійно залежні, то лінійно залежні і всі ці вектори.

Важливо!

Відповідно до раніше розглянутого поняття рангу матриці, він є максимальною кількістю лінійно незалежних векторів-рядків (або, що те ж саме, векторів-стовпців).

n**- вимірним лінійним простором** *називається* лінійний простір, в якому максимально можлива кількість лінійно незалежних елементів дорівнює n, а сама сукупність n лінійно незалежних елементів – <u>*називається*</u> **базисом**

простору. Основна властивість базису – будь-який елемент простору є лінійною комбінацією елементів базису, при цьому коефіцієнти такої лінійної комбінації *називають* **координатами елемента**.

Прикладом базису є сукупність рядків (стовпців) базисного мінору матриці (решта рядків (стовпців) є їх лінійними комбінаціями).

Використання n- **вимірних просторів** дозволяє розглядати ринкові продукти як елементи таких просторів. Так, наприклад, легковик може бути охарактеризований такими числовими параметрами як ціна, максимальна швидкість, час розгону до деякої швидкості , споживання палива, місткість багажника, та інші. Розгляд конкуруючих та перспективних товарів та послуг за допомогою такого їх представлення дозволяє виявляти тенденції ринку та формувати відповідні маркетингові стратегії.

Якщо СЛАР є однорідною $(b_1 = b_2 = ... = b_n = 0)$, то така система напевне є сумісною ($x_1 = x_2 = ... = x_k = 0$ є її розв'язком). Якщо ж ОСЛАР має безліч розв'язків, то її **загальний розв'язок** $\overline{x_{з.о.}}$ можна розглядати як лінійну комбінацію (з довільними коефіцієнтами) деяких **частинних розв'язків**. Це пов'язано з тим, що , як легко перевірити, для системи $A\overline{x} = \overline{0}$, вектори $\alpha\,\overline{x}$, $\overline{x_1} + \overline{x_2}$ є розв'язками, якщо $\overline{x}$, $\overline{x_1}$ та $\overline{x_2}$ – розв'язки , тобто множина розв'язків однорідної системи є **лінійним простором** . Базис такого простору *називається* **фундаментальною системою розв'язків**, розмірність його дорівнює $k - r$ (k – кількість невідомих, r – ранг), побудувати його можна, наприклад, послідовно покладаючи одну з вільних невідомих 1, а решту – нулю. Таким чином,

$$\overline{x_{з.о.}} = c_1\,\overline{x_1} + ... + c_{k-r}\,\overline{x_{k-r}}\ ,$$

де $c_1, c_2, \ldots, c_{k-r}$ – довільні дійсні числа.

У випадку неоднорідної системи із нескінченною множиною розв'язків $A\overline{x} = \overline{b}$, $\overline{b} \neq \overline{0}$, її загальний розв'язок $\overline{x_{з.н.}}$ являє собою суму загального розв'язку $\overline{x_{з.о.}}$ відповідної однорідної системи $A\overline{x} = \overline{0}$ та **частинного розв'язку неоднорідної системи** $\overline{x_{ч.н.}}$, який можна отримати, наприклад, поклавши всі вільні невідомі рівними нулю. З точки зору лінійних просторів, розв'язання системи $A\overline{x} = \overline{b}$ можна розглядати як знаходження елемента $\overline{x}$, який при перетворенні шляхом множення на матрицю A виявляється рівним даному вектору $\overline{b}$.

Приклад 4.1.1.

Знайти загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_5 = 2. \end{cases}$$

Записуємо розширену матрицю системи:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Зводимо елементарними перетвореннями рядків розширену матрицю до східчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \overleftarrow{a}_2 \leftarrow \overleftarrow{a}_2 - 2\overleftarrow{a}_1 \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \operatorname{rang} A = 2 \\ \operatorname{rang} \tilde{A} = 2 \end{array}.$$

Оскільки $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A} = 2$, то система сумісна. Далі

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \overleftarrow{a}_1 \leftarrow \overleftarrow{a}_1 + \frac{1}{3}\overleftarrow{a}_2 \\ \overleftarrow{a}_2 \leftarrow -\frac{1}{3}\overleftarrow{a}_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -1/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, x_1 та x_3 — базисні змінні, а $x_2 = C_1, x_4 = C_2, x_5 = C_3$ — вільні змінні, яким надано довільних значень $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. Виписуємо систему, яка відповідає перетвореній розширеній матриці, і виражаємо з неї базисні змінні:

$$\begin{cases} x_1 + 2C_1 - \frac{1}{3}C_2 = 1, \\ x_3 - \frac{2}{3}C_2 + C_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 2C_1 + \frac{1}{3}C_2, \\ x_3 = \frac{2}{3}C_2 - C_3. \end{cases}$$

Записуємо загальний розв'язок системи:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 - 2C_1 + \frac{1}{3}C_2 \\ C_1 \\ \frac{2}{3}C_2 - C_3 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

Перепишімо загальний розв'язок заданої системи:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 - 2C_1 + \frac{1}{3}C_2 \\ C_1 \\ \frac{2}{3}C_2 - C_3 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{частинний розв'язок неоднорідної СЛАР}} \underbrace{+ C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{загальний розв'язок однорідної СЛАР}}. \bullet$$

4.2. Власні числа і власні вектори

В багатьох випадках виявляється актуальною задача про пошук **власних векторів матриці** A, тобто векторів $\overline{x} \neq \overline{0}$, які задовольняють рівності $A\overline{x} = \lambda\overline{x}$, де $\lambda \neq 0$ – **власне число**, що відповідає власному вектору $\overline{x}$.

Знаходження власних чисел та власних векторів здійснюються наступним чином: рівність $A\overline{x} = \lambda\overline{x}$ переписується у вигляді $(A - \lambda E)\overline{x} = 0$. Це – однорідна СЛАР, яка має ненульові розв'язки $\overline{x}$ тільки якщо її розв'язків безліч. Останнє можливо тільки якщо $|A - \lambda E| = 0$, що дозволяє визначити власні числа λ. Підставляючи послідовно отримані значення λ в систему $(A - \lambda E)\overline{x} = 0$, знаходимо відповідні їм ненульові власні вектори $\overline{x}$. Відзначимо, що ці вектори знаходяться з точністю до сталих множників.

Приклад 4.2.1

Знайти власні числа матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Складаємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 & 2 \\ 6 & -4-\lambda & 4 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0.$$

Його корені $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3.$

1) $\lambda_1 = 1,$ йому відповідає система $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

Загальний розв'язок якої $\overrightarrow{X}_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, C_1 \in R.$ є власним вектором з власним числом $\lambda_1 = 1$.

2) $\lambda_2 = 2$, йому відповідає система $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

Загальний розв'язок якої $\overrightarrow{X}_2 = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C_2 \in R$ є власним вектором з власним числом $\lambda_2 = 2$.

2) $\lambda_3 = 3$, йому відповідає система $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

Загальний розв'язок якої $\overrightarrow{X}_3 = C_3 \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C_3 \in R$ є власним вектором з власним числом $\lambda_3 = 3$.

Контрольні запитання

1. Що таке арифметичний n-вимірний простір, лінійний простір?
2. Що таке лінійна залежність та незалежність елементів лінійного простору (векторів)? Наведіть приклади
3. Що таке базис простору та координати його елемента? Наведіть приклади.
4. Що таке частинний та загальний роз'вязки СЛАР? Чому ОСЛАР завжди сумісна? Яка структура загальних розв'язків ОСЛАР та СЛАР?
5. Що таке власний вектор та власне число матриці?