

Лекція 5. Моделі та методи лінійної алгебри в економічних задачах

- 5.1. Модель пільгового оподаткування при добродчинній діяльності
- 5.2. Модель багатогалузевої економіки Леонтьєва
- 5.2. Модель портфеля активів
- 5.3. Лінійна модель обміну (модель міжнародної торгівлі)

Які існують моделі лінійної алгебри економічних задач? Як складається матриця повних витрат? Що називається співвідношенням балансу?

5.1. Модель пільгового оподаткування при добродчинній діяльності

Розглянемо модель розрахунку двоступінчастих (на державному та регіональному рівнях) податкових відрахувань підприємства з урахуванням добродчинної діяльності. Припустимо, що на добродчинність перераховується t_C відсотків залишку прибутку після сплати державного та регіонального податків, при цьому загальнодержавний податок складає t_S відсотків суми, що залишилась від прибутку після відрахувань на добродчинну діяльність, а регіональний – t_R відсотків від частин прибутку, що залишилась після сплати державного податку та добродчинного внеску.

Зауважимо, що запропонована модель відповідає законодавству розвинених країн, яке орієнтоване на стимулювання добродчинності на рівні як юридичних, так і фізичних осіб.

Складемо математичну модель розглянутої ситуації.

Нехай прибуток підприємства – P , підлягають обчисленню суми державного податку – S , регіонального – R та добродчинного внеску – C . Тоді, відповідно до наведених вище відсоткових ставок, маємо:

$$C = t_C \cdot P - S - R ;$$

$$S = t_S(P - C);$$

$$R = t_R(P - C - S).$$

Звідки

Маємо

$$S = 2025000 \text{ грн.},$$

$$C = 984000 \text{ грн.},$$

$$R = 369000 \text{ грн.}$$

5.2. Модель багатогалузевої економіки Леонт'єва

Розглянемо економічну систему, яка складається з n пов'язаних між собою галузей виробництва. Продукція кожної галузі частково іде на зовнішнє споживання (*кінцевий продукт*), а частково використовується в якості сировини в інших галузях. Цю частину продукції називають **виробничими потребами**.

Позначимо через X_i обсяг валової продукції i -ої галузі за запланований період, а через Y_i обсяг кінцевої продукції i -ої галузі, призначеної для невикористаного споживання $i = (1, 2, \dots, n)$, x_{ij} – частина продукції i -ої галузі, що споживається j -ою для забезпечення випуску її продукції в розмірі X_j .

Величини $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) називаються коефіцієнтами прямих витрат.

витрат.

Ці коефіцієнти утворюють квадратну **матрицю коефіцієнтів прямих витрат**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

яку іноді називають **матрицею технологічних коефіцієнтів** (*технологічною матрицею*)

Матриця називається **продуктивною**, якщо усі елементи додатні, та сума елементів в кожному стовбці менша за 1.

Матриця $A = \|a_{ij}\|$ – містить інформацію про структуру міжгалузевих зв'язків та про технологію виробництва даної економіко-виробничої системи.

Основною задачею міжгалузевого балансу є знаходження вектору валового випуску X , який при відомій матриці прямих затрат A забезпечує заданий вектор кінцевого продукту Y . Тому, якщо матриця $(E - A)$ не вироджена, то

$$X = (E - A)^{-1} Y.$$

Матриця

$$S = (E - A)^{-1}$$

називається матрицею **повних затрат**.

Приклад 5.2.1.

У наступній таблиці наведено балансовий звіт для двогалузевої моделі економіки при досягнутих валових показниках за минулий рік

Галузь	Споживання продукції		Валовий випуск за Минулий рік
	Енергетика	Машинобуд	
Енергетика	100	160	500
Машинобудування	275	40	400

Обчислити необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, що забезпечує у наступному році вектор випуску кінцевої продукції $Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$.

Розв'язок. За формулою

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

знаходимо матрицю коефіцієнтів прямих затрат:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,55 & 0,1 \end{pmatrix},$$

яка є продуктивною.

Матриця $(E - A)$ має вигляд

$$E - A = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,4 \\ -0,55 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю повних затрат $S = (E - A)^{-1}$:

$$S = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,5} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,55 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,8 & 0,8 \\ 1,1 & 1,6 \end{pmatrix}.$$

Отже, для даного вектора кінцевої продукції Y можемо знайти необхідний об'єм валового випуску у наступному році X за формулою:

$$X = SY,$$

$$X = \begin{pmatrix} 1,8 & 0,8 \\ 1,1 & 1,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 440 \\ 380 \end{pmatrix}.$$

5.3. Лінійна модель обміну (модель міжнародної торгівлі)

Поняття власного вектора і власних значень матриці можна застосувати для аналізу процесу взаємних закупівель товарів.

Розглянемо наступне питання: якими мають бути співвідношення між національними доходами країн, що торгують між собою, щоб торгівля була взаємовигідною, тобто фактично бездефіцитною для кожної з цих країн. Для відповіді на це питання розглянемо *лінійну модель обміну*, або *модель міжнародної торгівлі*.

Нехай маємо n країн. Їх національні бюджети позначимо відповідно через x_1, x_2, \dots, x_n . Нехай a_{ij} – частка доходу, яку j -а країна витрачає на закупівлю товару i -ої країни.

Будемо вважати, що весь національний дохід кожної країни витрачається лише на закупівлю товарів або всередині країни, або зовні її, тобто є справедливою рівність

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.2)$$

Розглянемо матрицю, що складається з коефіцієнтів a_{ij} :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

вона називається **структурною матрицею торгівлі**.

У відповідності до (5.2) сума елементів кожного стовбця матриці A дорівнює одиниці.

Для i -ої країни прибуток від внутрішньої та зовнішньої торгівлі становить

$$p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n. \quad (5.4)$$

Умова збалансованої торгівлі формується так: прибуток від торгівлі кожної країни має бути не менше ніж її національний дохід, тобто торгівля має бути бездефіцитною для кожної країни: $p_i \geq x_i$ для всіх i , або

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.5)$$

Теорема

Умовою бездефіцитної торгівлі є рівність:

$$p_i = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Введемо вектор бюджетів $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Тоді система рівнянь (5.4), з урахуванням (5.5), приймає вигляд

$$A\bar{x} = \bar{x}. \quad (5.6)$$

Це рівняння означає, що власний вектор $\lambda = 1$ матриці A , що відповідає значенню, складається з бюджетів країн, що ведуть збалансовану торгівлю. Отже,

задача звелась до знаходження власного вектору структурної матриці торгівлі, що відповідає власному значенню $\lambda = 1$.

Приклад 5.4.1.

Структурна матриця торгівлі трьох країн має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,4 & 0,4 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

За яких умов досягається збалансована торгівля цих країн?

Розв'язок. Розв'яжемо матричне рівняння (5.6). Перепишемо його у вигляді

$$A - E \bar{x} = \bar{0}, \text{ тобто}$$

$$\begin{pmatrix} -0,8 & 0,3 & 0,5 \\ 0,4 & -0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 & -0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг цієї системи дорівнює двом. Отримаємо

$$\begin{cases} x_1 = \frac{13}{12} x_3, \\ x_2 = \frac{11}{9} x_3. \end{cases}$$

Поклавши $x_3 = 36$ (щоб не було дробових чисел), отримаємо вектор

$$\bar{x} = (39, 44, 36),$$

який можна взяти, як власний вектор.

Отже, збалансована торгівля цих країн досягається за умови, що їх доходи знаходяться у співвідношенні

$$x_1 : x_2 : x_3 = 39 : 44 : 36.$$

5.4. Модель портфеля активів

У фінансовій сфері розроблені моделі портфеля цінних паперів, які дозволяють визначати, яку кількість активів різного виду споживачу (інвестору) вигідно придбати в залежності від інформації про ризик цих активів та схильності до ризику. Розглянемо один з варіантів формування портфеля активів, у якому враховується фактор невизначеності.

Нехай маємо два види активів – акції та облігації, які інвестор може купити в початковий період та продати в кінці. Відомі початкові ціни однієї акції та однієї облігації на початку періоду – c_1 та c_2 відповідно. Фактор невизначеності полягає в тому, що на фінансовому ринку наприкінці періоду можуть виникнути три можливі ситуації, але реалізуватись може лише одна з трьох. Очікувана ціна акцій та облігацій в кінці кожного з трьох періодів за оцінками експертів є відомою (див. табл. 5.4.1)

Табл.5.4.1

Цінні папери	Очікувана вартість 1 од. (грн.)		
	1 ситуація	2 ситуація	3 ситуація
Акції	y_{11}	y_{21}	y_{31}
Облігації	y_{12}	y_{22}	y_{32}

Мірою ефективності інвестицій в акції за умови, що реалізується ситуація i ($i = 1, 2, 3$) є

$$R_{i1} = \frac{y_{i1}}{c_1}.$$

Аналогічно мірою ефективності інвестицій в облігації за умови, що реалізується ситуація i ($i = 1, 2, 3$) є

$$R_{i2} = \frac{y_{i2}}{c_2}.$$

Позначимо через n_1 та n_2 кількість акцій та облігацій, які інвестор може придбати на початку періоду, а S – загальну суму інвестицій. Оскільки придбання активів відбувається за початковими цінами c_1 та c_2 , а загальні витрати складають S , то має виконуватись *бюджетне обмеження інвестора*

$$c_1 n_1 + c_2 n_2 = S.$$

Тоді можлива вартість портфеля для кожної з трьох ситуацій має вигляд

$$S_i = y_{i1} n_1 + y_{i2} n_2, \quad i = 1, 2, 3.$$

Мірою ефективності портфеля i -ої ситуації є показник

$$R_i = \frac{S_i}{S}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Покладемо

$$x_1 = \frac{c_1 n_1}{S}, \quad x_2 = \frac{c_2 n_2}{S}.$$

Зауважимо, що x_1, x_2 — це частини, які складають інвестиції в активи першого та другого типів від всієї інвестиційної суми S .

Тоді формулу бюджетного обмеження інвестора можна переписати у вигляді:

$$x_1 + x_2 = 1.$$

Будь-який портфель задається парою чисел (x_1, x_2) , що складаються з частин інвестицій в активи. При цьому, якщо реалізується ситуація i ($i = 1, 2, 3$), то ефективність портфеля можна обчислити за формулою

$$R_i = R_{i1}x_1 + R_{i2}x_2, \quad (i = 1, 2, 3), \quad i = 1, 2, 3.$$

Портфель називається **без ризиковим**, якщо його ефективність в трьох ситуаціях є однаковою, тобто $R_1 = R_2 = R_3$.

Це означає, що для того, щоб визначити *безризикові портфелі* необхідно розглянути систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ R_{11}x_1 + R_{12}x_2 = R_{21}x_1 + R_{22}x_2, \\ R_{31}x_1 + R_{32}x_2 = R_{21}x_1 + R_{22}x_2. \end{cases}$$

Якщо ця система не має розв'язку, то всі портфелі є ризиковими.

Ненульовий портфель (x_1, x_2) , який задовольняє умові $x_1 + x_2 = 0$, називається **арбітражним**.

Портфель (x_1, x_2) називають **дублюючим**, якщо існує інший портфель (z_1, z_2) , для якого виконується рівність

$$R_{i1}x_1 + R_{i2}x_2 = R_{i1}z_1 + R_{i2}z_2, \quad i = 1, 2, 3.$$

Випадок з номером k називають **страховим**, якщо знайдеться портфель для якого має місце

$$\begin{aligned} R_{k1}x_1 + R_{k2}x_2 &> 0, \\ R_{i1}x_1 + R_{i2}x_2 &= 0, \quad i \neq k. \end{aligned}$$

Іноді корисно знаходити єдину умовну вартість ситуацій. Прогнозованим ситуаціям ставлять у відповідність такі вагові коефіцієнти p_1, p_2, p_3 , що поточна вартість кожного виду активу урівноважується із зваженою сумарною вартістю по ситуаціям, тобто

$$p_1 y_{11} + p_2 y_{21} + p_3 y_{31} = c_1, \quad (\text{для акцій})$$

$$p_1 y_{12} + p_2 y_{22} + p_3 y_{32} = c_2. \quad (\text{для облігацій})$$

Тут числа y_{ij}, c_1, c_2 – фіксовані, p_1, p_2, p_3 – невідомі. Трійка (p_1, p_2, p_3) називається **вектором вагових коефіцієнтів** можливих ситуацій.

Систему для знаходження цін зручно записати у вигляді

$$\begin{cases} p_1 R_{11} + p_2 R_{21} + p_3 R_{31} = 1, \\ p_1 R_{12} + p_2 R_{22} + p_3 R_{32} = 1. \end{cases}$$

Приклад 5.4.1.

Ефективність акцій та облігацій фірми в трьох можливих ситуаціях, та поточна їх вартість наведені в таблиці 5.4.2.

Таблиця 5.4.2

Цінні папери	Ефективність акцій $R_{ij} (i = 1, 2, 3; j = 1, 2)$			Початкова вартість
	1 ситуація	2 ситуація	3 ситуація	
Акції	1	2	3	c
Облігації	3	2	1	c

Інвестор придбав дві акції та одну облігацію. Знайти загальну суму інвестицій, частки активів в заданому портфелі, ефективність для трьох можливих ситуацій, визначити можливий вектор вагових коефіцієнтів для даного портфеля.

Розв'язок. За умовою задачі $n_1 = 3, n_2 = 1$, тоді

$$c_1 n_1 + c_2 n_2 = c \cdot 3 + c \cdot 1 = 4c,$$

а бюджетне обмеження дає рівність $S = 4c$, Отже, о загальна сума інвестицій дорівнює $4c$.

Знайдемо частки активів у заданому портфелі:

$$x_1 = \frac{3c}{4c} = \frac{3}{4}; \quad x_2 = \frac{c}{4c} = \frac{1}{4}.$$

Отже, маємо портфель $\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)$. Обчислимо його ефективність:

$$R_1 = R_{11}x_1 + R_{12}x_2 = 1 \cdot \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2},$$

$$R_2 = R_{21}x_1 + R_{22}x_2 = 2 \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 2,$$

$$R_3 = R_{31}x_1 + R_{32}x_2 = 3 \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{2}.$$

Оскільки показники різні, то портфель є ризиковим. Запишемо систему для визначення вагових коефіцієнтів

$$\begin{cases} p_1 + 2p_2 + 3p_3 = 1, \\ 3p_1 + 2p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Знайдемо розв'язок методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left| I \times (-3) + II \rightarrow II \right| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

Система має безліч розв'язків. Нехай $p_3 = a, a = const$, тоді

$$2p_2 + 4p_3 = 1, p_2 = \frac{1}{2} - 2a, p_1 = a, a = const.$$

Отже, розв'язком такої системи може бути, наприклад, такий набір вагових коефіцієнтів

$$p_1 = p_3 = \frac{1}{4}, p_2 = 0.$$

Контрольні запитання

1. Що називають співвідношенням балансу?
2. Як виглядає матриця повних затрат?
3. Що таке портфель? Які існують типи портфелів?
4. Яка умова бездифіцитної торгівлі?