Лекція 6. Представлення економічних показників за допомогою координат та векторів

6.1. Елементи векторної алгебри
6.2. Системи координат, вектори в координатній формі та дії над ними
6.3. Застосування векторів при розв'язанні економічних задач

Що таке вектор і як його зображають? Які дії можна виконувати над векторами? Як запроваджують координатні осі, системи координат, задають координати векторів? Які дії і яким чином можна виконувати над векторами, заданими їх координатами?

6.1. Елементи векторної алгебри

Вектором <u>*називається*</u> величина, яка характеризується не тільки своїм **числовим значенням** (що називається також **довжиною** або **модулем вектора**), але й **напрямом**.

Геометрично вектор зображують, як **напрямлений відрізок**, а позначають $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, або $\overline{AB}, \overline{MN}$ і т.д. (в останньому випадку перша літера позначає **точку початку вектора**, а друга – **точку його кінця**) (Рис 6.1.1).

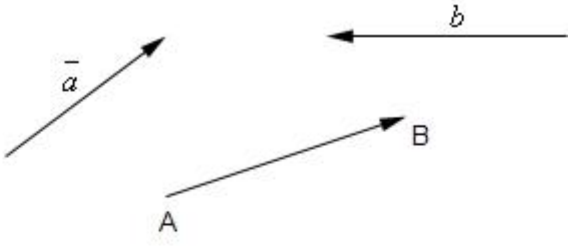


Рис 6.1.1.

Довжини (модулі) векторів позначають $|\bar{a}|$, $|\overline{AB}|$.

Нульовим вектором <u>*називають*</u> вектор, початок і кінець якого збігаються (тобто такий, який має нульову довжину), його позначають $\bar{0}$.

Вектори <u>*називаються*</u>:

- **рівними** ($\overline{a} = \overline{b}$), якщо вони мають однакові величини та напрямки;
- **колінеарними** ($\overline{a} \| \overline{b}$), якщо вони розташовані на одній прямій або паралельних прямих;
- **протилежними** ($\overline{a} = -\overline{b}$), якщо вони колінеарні, мають однакові довжини та протилежні напрями;
- **компланарними**, якщо вони лежать в одній площині (два вектори завжди компланарні, три вектори можуть бути як компланарними, так і не компланарними).

Ортом вектора $\overline{a}$ *називається* однаково з ним напрямлений вектор одиничної довжини $\overline{a}_0$. В таких випадках пишуть $\overline{a} = |\overline{a}| \cdot \overline{a}_0$.

6.2. Системи координат, вектори в координатній формі та дії над ними

Раніше було запроваджене поняття координатної осі.

Декартовою системою координат на площині *називають* дві взаємно перпендикулярні координатні (числові) осі із спільним початком координат 0 у двовимірному просторі R^2 (рис. 6.2.1)

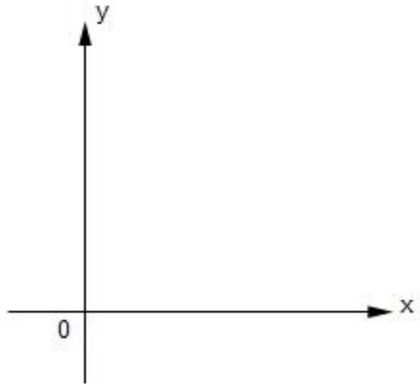


Рис. 6.2.1

Прямокутною декартовою системою координат у просторі *називають* три взаємно перпендикулярні координатні осі із спільним початком координат 0 у тривимірному просторі R^3 (рис. 6.2.2).

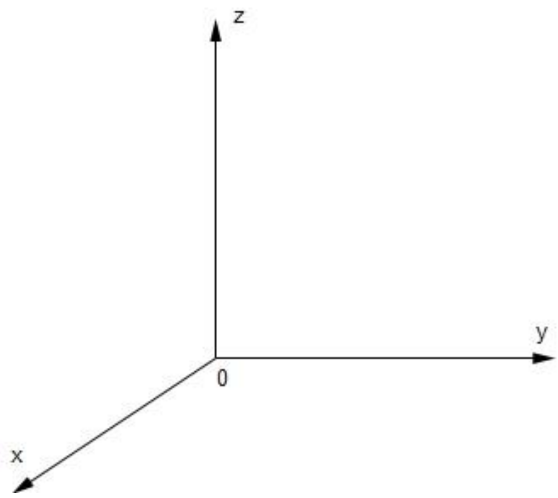


Рис 6.2.2

Вісь Ox *називають* **віссю абсцис** (її орт позначають i), вісь Oy – **віссю ординат** (орт – j), вісь Oz – **віссю аплікат** (орт – k).

Координати проекцій точки M на осі Ox та Oy (або, у просторі, на Ox, Oy та Oz) *називають* **координатами** цієї **точки на площині** (у просторі), відповідно, координатами точки на площині (у просторі) є упорядкована пара (трійка) дійсних чисел.

Важливо!

Аналогічно до того, як існує взаємно-однозначна відповідність між точками осі та всіма дійсними числами, існують взаємно-однозначні відповідності між точками на площині (у просторі) та упорядкованими парами (трійками) дійсних чисел.

Проекцією вектора $\overline{AB}$ **на вісь** l *називається* довжина відрізка між проекціями його точок A_l та B_l, взята зі знаком «+», якщо напрям A_lB_l співпадає з напрямом осі, і зі знаком «-» у протилежному випадку.

Координатами вектора на площині (у просторі) *називають* упорядковану пару (трійку) його проекцій на координатні осі.

Оскільки проекція вектора на координатну вісь є різниця відповідних координат його кінця та початку, то для $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ маємо $\overline{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$. З теореми Піфагора випливає, що:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$ – **довжина(модуль) вектора**;

взагалі, для вектора $\bar{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,

$$\left|\bar{a}\right|=\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}\,.$$

Приклад 6.2.1.

Дано $A(2,3,5)$, $B(2,6,1)$.

$$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(2-2)^2+(6-3)^2+(1-5)^2}=5\,.$$

Кутом α **між двома векторами** (або між **вектором** та **віссю**) називають **найменший кут між їх напрямами** за умови, що ці вектори (або вектор та орт осі) зведені до спільного початку

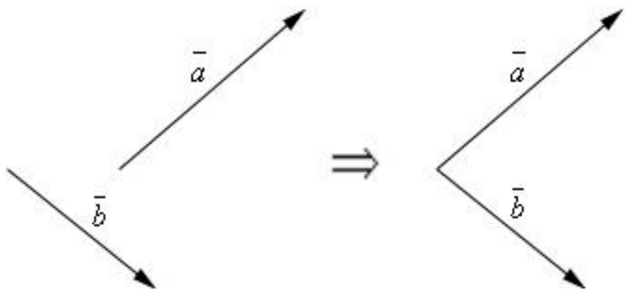
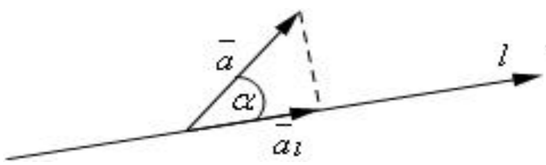


Рис. 6.2.3

У випадку проекції вектора $\bar{a}$ на вісь l маємо



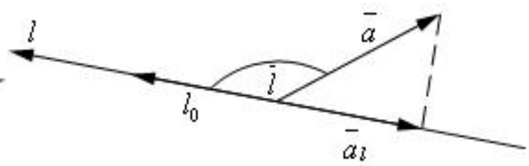


Рис. 6.2.4 Рис.6.2.5

Напрямними косинусами *<u>називають</u>* **к**осинуси кутів α,β,γ, утворених вектором з відповідними координатними осями. Таким чином, якщо: $\bar{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,

то

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}}\quad \cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}}, \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Приклад 6.2.2.

Дано $\overline{a} = \{-3, 0, 4\}$. Тоді $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = \frac{4}{5}$. Очевидно, що

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Важливо!

Надалі будемо вважати, що вектор не змінюється при паралельному переносі, оскільки при цьому не змінюються його координати.

Вектор $\overline{OA}$ (де O - початок координат) *називають* **радіус-вектором** точки A і позначають r_A, його координати співпадають з координатами точки A.

Розглянемо дії над векторами як з точки зору їх геометричного смислу, так і в координатній формі.

Сумою векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ *називають* вектор $\overline{c}$, який сполучає початок вектора $\overline{a}$ з кінцем вектора $\overline{b}$ при умові, що початок вектора $\overline{b}$ співпадає з кінцем вектора a (рис. 6.2.6).

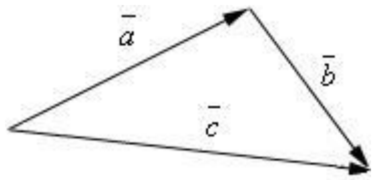


Рис. 6.2.6

при цьому, якщо $\overline{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\overline{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, то $\overline{c} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}$.

Зауважимо, що аналогічно може здійснюватись додавання і більшої ніж два, кількості векторів.

Добутком вектора $\overline{a}$ на число k *називають* вектор $\overline{b} = k \cdot \overline{a}$, який колінеарнй з вектором a, має довжину $|\overline{b}| = |k| \cdot |\overline{a}|$ і напрям такий самий, як $\overline{a}$ (при $k > 0$) або протилежний напряму $\overline{a}$ (при $k < 0$).

Зауважимо, що при $k = 0$ отримуємо нульовий вектор, а при $k = -1$ - вектор протилежний до вектора $\overline{a}$. В координатній формі ця дія виглядає так:

$$\overline{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\ \overline{b}=k\overline{a}=\{ka_x,ka_y,ka_z\}$$

Приклад 6.2.3.

Нехай $\overline{a}=\{2,-3,4\}$, $\overline{b}=\{0,-3,2\}$. Тоді

$$2\overline{a}+3\overline{b}=\{2\cdot 2+3\cdot 0, 2\cdot(-3)+3\cdot(-3), 2\cdot(-5)+3\cdot 4\}=\{4,-15,2\}.$$

Скалярним добутком векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ *називають* число, рівне добутку модулів (довжин) цих векторів на косинус кута між ними:

$$\overline{a}\overline{b}=|\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi.$$

В координатній формі маємо при

$$\overline{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\ \overline{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$$

$$\overline{a}\overline{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

Важливо!

За допомогою скалярного добутку можна, насамперед, визначити кут між векторами.

Дійсно, оскільки $\cos\varphi=\dfrac{\overline{a}\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|}$, то

$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Приклад 6.2.4.

Знайти кут між векторами

$$\bar{a}=\{1;-1;-1\},\bar{b}=\{2;0;2\}.$$

$$\cos\gamma=\frac{1\cdot 2+(-1)\cdot 0+(-1)\cdot 2}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+0^2+2^2}}=\frac{0}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{8}}=0,\ \gamma=\frac{\pi}{2}.$$

Оскільки вектори на площині та у просторі є елементами лінійних просторів R^2 та R^3 відповідно, то виникає питання про базиси таких просторів та розклад довільних векторів по цих базисах.

Найуживанішими є базиси, складені з координатних ортів: на площині – $\bar{i}, \bar{j}$; $\bar{i} = \{1;0\}, \bar{j} = \{0;1\}$, у просторі –$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$; $\bar{i} = \{1;0;0\}, \bar{j} = \{0;1;0\}, \bar{k} = \{0;0;1\}$. В той же час, базис на площині може складатись з будь-яких двох неколінеарних векторів – $\bar{a}, \bar{b} - \bar{a} \neq k\bar{b}$, базис у просторі – з будь-яких трьох некомпланарних векторів a, b, c.

Якщо при цьому відомі координати векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ в деякому іншому базисі, то некомпланарність означає, що ранг матриці, складеної (по рядках чи стовпцях) з координат цих векторів дорівнює 3 (або, що те ж саме, визначник цієї матриці ненульовий). Базис може бути **ортогональним** (базисні вектори взаємно перпендикулярні), **ортонормованим** (ортогональним з векторів одиничної довжини), або загального вигляду. Якщо базис складається з векторів:

$$\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\},\ \bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\},\ \bar{c} = \{c_x, c_y, c_z\},$$

а розкладу підлягає вектор $\bar{d} = \{d_x, d_y, d_z\}$, то розклад його по базису $d = \alpha a + \beta b + \gamma c$ означає знаходження коефіцієнтів α, β, γ з системи

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = d_x, \\ \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 = d_y, \\ \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = d_z. \end{cases}$$

Приклад 6.2.5.

Розкласти вектор $\bar{d} = \{-1;3;4\}$ за базисом

$$\bar{a} = \{4;1;-1\}, \bar{b} = \{3;-1;0\},\ \bar{c} = \{-1;1;1\}.$$

Треба знайти числа $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, такі що

$$\bar{d} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c}.$$

В координатній формі

$$\begin{cases} 4\alpha + 3\beta - \gamma = -1, \\ \alpha - \beta + \gamma = 3, \\ -\alpha + \gamma = 4. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4-3-0+1-3-0=-9.$$

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+12-0-4-9-0=0.$$

$$\Delta_\beta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 12+1-4-3+1-16=-9.$$

$$\Delta_\gamma = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -16-9-0+1-12+0=-36.$$

Отже, $\alpha = 0, \ \ \beta = 1, \ \ \gamma = 4 \Leftrightarrow \bar{d} = 0 \cdot \bar{a} + \bar{b} + 4\bar{c}$.

6.3. Застосування векторів при розв'язанні економічних задач

У попередніх лекціях вже розглядалися приклади застосування векторів до задач мікроекономіки. Так, використовувались вектор–стовпець кінцевої продукції, вектор-план, вектор бюджетів різних країн. Ознайомимося з іншими простими прикладами застосування векторів.

Приклад 6.3.1.

Підприємство щодобово випускає чотири типи виробів, основні виробничо-економічні показники яких наведені в таблиці 6.3.1.

Таблиця 6.3.1.

Вид виробу п/п	Кількість виробів, од.	Витрати сировини кг/вир.	Норми часу виробництва год/вир.	Вартість виробу грош.од/вир.
I	20	5	10	30
II	50	2	5	15
III	30	7	15	45
IV	40	4	8	40

Необхідно визначити наступні показники: витрати сировини S, затрати робочого часу T і вартість P продукції, що випускається підприємством.

Розв'язок. За даними з таблиці 1 складемо чотири вектори, які характеризують весь виробничий процес:

$$\overline{q} = \ \ 20, 50, 30, 40 \ \ -$$ вектор асортименту;

$$\overline{s} = \{5,\, 2,\, 7, 4\} -$$ вектор витрат сировини;

$$\overline{t} = \{10,\, 5,\, 15,\, 8\} -$$ вектор робочого часу;

$$\overline{p} = \{30,\, 15,\, 45,\, 40\} -$$ вектор вартості.

Тоді шукані величини S, T, P – це відповідні скалярні добутки вектору асортименту на три інші вектори, тобто

$$S = \overline{q} \cdot \overline{s} = 100 + 100 + 200 + 160 = 570 \quad \text{(кг).}$$

$$T = \overline{q} \cdot \overline{s} = 200 + 250 + 450 + 240 = 1220 \quad \text{(год.).}$$

$$P = \overline{q} \cdot \overline{p} = 600 + 750 + 1350 + 800 = 3500 \quad \text{(грош.од).}$$ ■

Приклад 6.3.2.

Фірма, що бере участь у будівництві гуртожитків для студентів одного з вишів міста, одержала кредити від трьох комерційних банків. Вони надали кредити в розмірі 200, 500, 600 тис. грн відповідно під річні відсоткові ставки 40 %, 25 % і 30%. Визначити, яку суму треба заплатити за кредити наприкінці року.

Розв'язок. Розглянемо вектор кредитів $\overline{a} = \ a_1, a_2, a_3 \ = \ 200, 500, 600$ та вектор коефіцієнтів виплат $\overline{b} = \ b_1, b_2, b_3 \ = \ 1,40, 1,25, 1,30$

.Суму, яку потрібно заплатити наприкінці року за кредити, взяті у банках отримуємо наступним чином:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = 200 \cdot 1,40 + 500 \cdot 1,25 + 600 \cdot 1,30 = 1685 \text{ тис. грн.}$$

Зауважимо, що найпростіші лінійні статистичні економічні моделі описуються з використанням векторів. Для дослідження динамічних моделей різних процесів стан економічної системи, що вивчається, в момент часу *t* описується за допомогою вектора $\overline{X}$ із *n*−вимірного простору, а керування процесом в той самий момент часу описується за допомогою вектора $\overline{Y}$ із *m*−вимірного простору. Таким чином, в динамічних моделях використовуються вектори *n*− та *m*−вимірних просторів, координати яких залежать від часу *t*.

Контрольні запитання

1. Що таке вектор і як він характеризується? Які вектори називаються рівними, колінеарними, компланарними, протилежними? Що таке орт вектора?
2. Як визначають прямокутну декартову систему координат на площині і у просторі?
3. Що називається координатами точки, вектора? Запишіть формули для координат вектора, який є добутком даного вектора на число, сумою даних векторів?
4. Що таке скалярний добуток векторів? Для чого він використовується?
5. Як обчислюється довжина вектора? Що таке напрямні косинуси вектора і як їх обчислюють?