Лекція 7. Моделі та методи векторної алгебри в економічних задачах

7.1. Продуктивна функція
7.2. Простір товарів. Вектор цін

Що таке продуктивна функція? Які об'єкти зазвичай позначають через вектори в задачах економічного змісту? Що називається індексом цін та індексом інфляції?

7.1. Продуктивна функція

При аналізі закономірностей виробництва використовується продуктивна функція, яка, по суті, є співвідношенням між використаними у виробництві ресурсами і випущеною продукцією. Нехай в деякому виробничому процесі є n виробничих ресурсів.Кількість $i-го$ ресурсу, який використали за проміжок часу t, позначимо x_i. Тоді виробничі ресурси – це вектор $\overline{x}=\{x_1,x_2,...,x_n\}$. Припустимо, що підприємство випускає m різних виробів. Кількість $j-го$ виробу позначимо y_j. Тоді випуск усіх виробів буде вектор $\overline{y}=\{y_1,y_2,...,y_m\}$. Нехай $\overline{a}=\{a_1,a_2,...,a_k\}$ – вектор параметрів виробництва (наприклад, різні види транспортних чи інших витрат).

Продуктивна функція пов'язує вектори ресурсів $\overline{x}$, випуску $\overline{y}$ та параметрів $\overline{a}$, тобто

$$F(\overline{x},\overline{y},\overline{a})=0.$$

Продуктивна функція задається аналітично або таблично.

Продуктивну функцію, розв'язану відносно вектора випуску продукції, тобто вигляду

$$\overline{y}=f_1(\overline{x},\overline{a}),$$

Називають **виробничею функцією**, а розв'язану відносно вектора $\overline{x}$, тобто вигляду

$$\overline{x} = f_2(\overline{y}, \overline{a})$$

називають **функцією виробничих витрат**.

Зрозуміло, що ці функції у конкретних випадках (коли вказано закони f_1 та f_2) використовують правила дій з векторами.

Приклад 7.1.1.

Підприємство випускає чотири види продукції $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$, у кількостях 50, 80, 20, 120 одиниць. При цьому загальні витрати сировини складають 7; 3,5; 10; 4 кг. Визначити загальні витрати сировини та її зміни при змінах випуску продукції $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$ відповідно +5; -4; -2;+10.

<u>Розв'язок.</u> . Нехай вектор випуску продукції $\overline{y} = \ 50;\ 80;\ 20;\ 120\ $, а вектор витрат сировини $\overline{a} = \ 7;\ 3,5;\ 10;\ 4\ $. Тоді загальні витрати сировини S є скалярний добуток векторів $\overline{a}$ та $\overline{y}$, тобто

$$S = \ \overline{a}, \overline{y}\ = 50 \cdot 7 + 80 \cdot 3,5 + 20 \cdot 10 + 120 \cdot 4 = 1310 \text{ кг.}$$

За властивістю скалярного добутку векторів обчислимо зміни загальних витрат сировини:

$$\Delta S = \ \overline{a} + \Delta\overline{a}, \overline{y}\ - \ \overline{a}, \overline{y}\ = 5 \cdot 7 - 4 \cdot 3,5 - 2 \cdot 10 + 10 \cdot 4 = 41 \text{ кг.}$$

7.2. Простір товарів. Вектор цін

Під *товаром* розуміють деяку продукцію або послугу, яка надходить на ринок для продажу в певний час у певному місці. Вважатимемо, що маємо n різних товарів. Обсяг $i-го$ позначимо через $x_i,\ i = 1,2,...,n.$. Тоді деякий набір цих товарів можна записати у вигляді вектора $\overline{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, тобто $\overline{x}$ є $n-$вимірним арифметичним вектором. З економічних міркувань розглядатимемо лише такі набори товарів, у яких компоненти $x_i \ge 0$ для всіх $i = 1,2,...,n.$ Множину всіх наборів товарів називають *простором товарів C*.

Вважаємо, що кожен товар має певну *ціну*. Всі ціни строго додатні. Нехай ціна одиниці $i-го$ товару становить $p_i,\ i = 1,2,...,n.$ Тоді вектор $\overline{p} = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ називають **вектором цін**.

Для набору товарів $\overline{x}=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ розглянемо вектор відповідних цін $\overline{p}=\{p_1,p_2,...,p_n\}$. Скалярний добуток цих векторів

$$\overline{x}\cdot\overline{p}=x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n$$

є числом, яке визначає ціну набору товарів і позначається $c(\overline{x})$.

Індекс споживчих цін характеризує зміни у часі загального рівня цін на товари та послуги, які купує населення для невиробничого споживання. Введемо позначення $\overline{q}=\{q_1,q_2,...,p_n\}$ – вектор обсягу споживчих товарів. Тоді **індексом цін** (у відсотках) називається величина, що обчислюється за формулою

$$p=\frac{\overline{c}\cdot\overline{q}}{\overline{c}_n\cdot\overline{q}}\cdot 100,$$

де $\overline{c}=\{c_1,c_2,...,c_k\}$ – вектор цін у поточному місяці, $\overline{c}_n=\{c_1,c_2,...,c_k\}$ – вектор цін у попередньому місяці. Звідси $100\cdot\overline{c}\cdot\overline{q}=p\cdot\overline{c}_n\cdot\overline{q}$, або $(100\cdot\overline{c}-p\cdot\overline{c}_n)\cdot\overline{q}=0$, тобто індекс можна визначати як числовий коефіцієнт p, який робить вектор $\overline{q}$ перпендикулярним до вектора $(100\cdot\overline{c}-p\cdot\overline{c}_n)$.

Індекс інфляції обчислюється за формулою

$$i=p-100.$$

до того ж

$$i=\frac{\overline{c}\cdot\overline{q}}{\overline{c}_n\cdot\overline{q}}\cdot 100-100=100\left(\frac{(\overline{c}-\overline{c}_n)\overline{q}}{\overline{c}_n\cdot\overline{q}}\right).$$

Приклад 7.2.1.

Витрати фірми на ресурси, які використовуються для виготовлення одиниці продукції задано в таблиці 7.2.1:

Таблиця 7.2.1

Ресурси	Кількість	Ціна
Сировина першого виду	200 кг	3 грн/ кг
Сировина другого виду	500 м^2	5 грн/кг
Витрати праці	0,65 людино-год	10 грн/людино год

Обладнання	0,7 машино-год	15 грн/ машино-год

Визначити ціну всіх ресурсів, що використовуються фірмою для виготовлення одиниці продукції .

<u>Розв'язок.</u> Введемо вектор витрат ресурсів на одиницю продукції $\overline{x}=\{200\,;500;\,0,65;\,0,7\}$ та вектор цін одиниць відповідних ресурсів $\overline{p}=\{3\,;5;\,10;\,15\}$. Вартість усіх ресурсів, що використовуються для виготовлення одиниці продукції, буде скалярним добутком векторів $\overline{x}$ та $\overline{p}$. Тому

$$c(\overline{x})=\overline{x}\cdot\overline{p}=x_1\cdot p_1+x_2\cdot p_2+x_3\cdot p_3+x_4\cdot p_4.$$

Отже,

$$c(\overline{x})=\overline{x}\cdot\overline{p}=x_1\cdot p_1+x_2\cdot p_2+x_3\cdot p_3+x_4\cdot p_4=200\cdot3+500\cdot5+0,65\cdot10+0,7\cdot15=3117\ \text{гр}$$

Розглянемо приклад обчислення індекса цін та індекса інфляції.

Приклад 7.2.2.

Визначити індекс цін та індекс інфляції через розрахунок вартості «споживчого кошика», який складається з 300 видів товарів і послуг, для індексів цін певного місяця, що наведено в таблиці 7.2.2.

Таблиця 7.2.2

Вид товару	Обсяг товару	Ціна одиниці товару в поточному місяці	Витрати споживачів у поточному місяці	Ціна одиниці товару в попередньому місяці	Витрати споживачів у попередньому місяці
A	3	4000	12000	3500	10500
B	10	2000	20000	1800	18000
C	2	4000	8000	4500	9000
Загальні витрати:	-	-	40000	-	37500

Розв’язок. Введемо вектор обсягу споживчих товарів

$$\overline{q} = \{3;10;2\};$$

вектор цін у поточному місяці

$$\overline{c} = \{4000;2000;4000\};$$

вектор цін у попередньому місяці

$$\overline{c}_n = \{3500;1800;4500\}.$$

Розрахуємо індекс цін. Для цього обчислимо скалярні добутки $\overline{c} \cdot \overline{q}$ та $\overline{c}_n \cdot \overline{q}$

$$\overline{c} \cdot \overline{q} = 3 \cdot 4000 + 10 \cdot 2000 + 2 \cdot 4000 = 40000\ ;$$

$$\overline{c}_n \cdot \overline{q} = 3 \cdot 3500 + 10 \cdot 1800 + 2 \cdot 4500 = 37500;$$

Тепер перейдемо до індексу інфляції.

$$p = 40000 : 37500 \cdot 100\ \% = 106,7\ \%.$$

А також

$$i = p - 100\ \% = 106,7\ \% - 100\ \% = 6,7\ \%.$$

Таким чином, індекс інфляції становить 6,7%.

Контрольні запитання

1. Як пов’язані між собою продуктивна функція, функція випуску та функція виробничих витрат?
2. Що називається вектором цін?
3. Як обчислюється індекс інфляції? Індекс цін?