Лекція 8. Економічні моделі та лінійні геометричні образи на площині

Пряма на площині як лінійний геометричний образ. Які типи рівнянь прямої на площині? Приклади використання лінійної залежності в задачах економічного змісту.

8.1. Найпростіші поняття аналітичної геометрії

Геометрією називають галузь математики, для якої первинно предметом вивчення були геометричні об'єкти, аналітична геометрія вивчає такі об'єкти алгебраїчними методами, встановлюючи зв'язок між ними та числами і рівняннями за допомогою методу координат: точці відповідають її координати, множині точок – співвідношення, якими задовольняють координати всіх цих точок.

Основними задачами аналітичної геометрії є:

Важливо!

1) ***Знаходження рівняння геометричного об'єкту, що розглядається як сукупність точок.***
2) ***Дослідження властивостей геометричного об'єкту та його побудова за відомим рівнянням.***

Історично найпершими і найпростішими задачами аналітичної геометрії вважаються задачі про знаходження відстані між двома точками (була розглянута раніше в зв’язку з визначенням довжини вектора за його координатами) та задача поділу відрізку у заданому відношенні:

Нехай відрізок M_1M_2 обмежений точками $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$ та $M_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$, треба знайти точку $M\left(x, y, z\right)$ таку, що $\dfrac{|M_1M|}{|MM_2|}=\lambda$, де $\lambda>0$ – задане число. Для розв’язання цієї задачі зауважимо, що вектори $\overline{MM_1}$ та $\overline{MM_2}$ є колінеарними, а, отже

$$\overline{MM_1}=\{\mathrm{x}-\mathrm{x}_1, \mathrm{y}-\mathrm{y}_1, \mathrm{z}-\mathrm{z}_1\}=\lambda, \overline{MM_2}=\lambda\{x_2-x, y_2-y, z_2-z\},$$

звідки

$$\begin{cases} x-x_1=\lambda(x_2-x), \\ y-y_1=\lambda(y_2-y), \\ z-z_1=\lambda(z_2-z). \end{cases}$$

таким чином

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \\ z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \end{cases}$$

Зауважимо нарешті, що припущення про те, що $\lambda>0$ дозволяє знайти точку M, яка лежить на відрізку M_1M_2 між точками M_1 та M_2, а, використовуючи знайдені формули у випадку $\lambda<0$, отримуватимемо точки, які лежать на продовженні цього відрізку.

Приклад 8.1.1.

Знайти координати вектора $\overline{AB},$ середини відрізка BC і точки перетину медіан M трикутника ABC з вершинами $A(2;1;3),\ B(4;3;4), C(8;-1;4)$ (рис. 8.1.1).

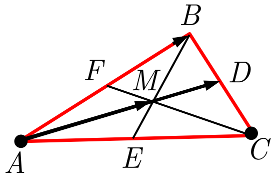

Рис. 8.1.1

<u>Розв'язок.</u> Координати вектора $\overline{AB} = \{4-2, 3-1, 4-3\} = \{2, 2, 1\}$

Середина відрізка BC точка D має координати:

$$\left.\begin{aligned} x_D &= \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{4+8}{2} = 6; \\ y_D &= \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{3-1}{2} = 1; \\ z_D &= \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{4+4}{2} = 4. \end{aligned}\right\} \Rightarrow D(6;1;4).$$

Точка M поділяє відрізок AD у відношенні $\lambda = 2$. Отже, точка M має координати:

$$\left.\begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + 2x_D}{1+2} = \frac{2+2\cdot 6}{3} = \frac{14}{3}; \\ y_M &= \frac{y_A + 2y_D}{1+2} = \frac{1+2\cdot 1}{3} = 1; \\ z_M &= \frac{z_A + 2z_D}{1+2} = \frac{3+2\cdot 4}{3} = \frac{11}{3}. \end{aligned}\right\} \Rightarrow M\left(\frac{14}{3};1;\frac{11}{3}\right).$$

8.2. Лінійні геометричні образи на площини

Під **рівнянням лінії на площині** Oxy розумітимемо рівняння, якому задовольняють координати x та y кожної точки даної лінії і не задовольняють координати будь-якої точки, що не лежить на цій лінії. Таке рівняння може бути записано у вигляді $y = f(x)$ – явний вигляд, або $F(x, y) = 0$ – неявний вигляд.

Біжучою точкою на лінії *<u>називається</u>* точка $M(x, y)$, яка рухається по лінії (може займати на ній довільне положення), а її координати – **біжучими координатами**. Якщо рівняння лінійне – $Ax + By + C = 0$ або $y = ax + b$, то маємо **лінійний геометричний образ на площині**, при цьому, вважаючи, що A і B одночасно не рівні нулю, маємо **загальне рівняння прямої на площині**, рівняння ж $y = ax + b$ завжди відповідає деякій прямій на площині.

Відзначимо при цьому, що при $C = 0$ маємо рівняння прямої, що проходить через початок координат (рис. 8.2.1), при $A = 0$ − рівняння прямої, паралельної осі абсцис (рис. 8.2.2), а при $B = 0$ − рівняння прямої, паралельної осі ординат (рис. 8.2.3).

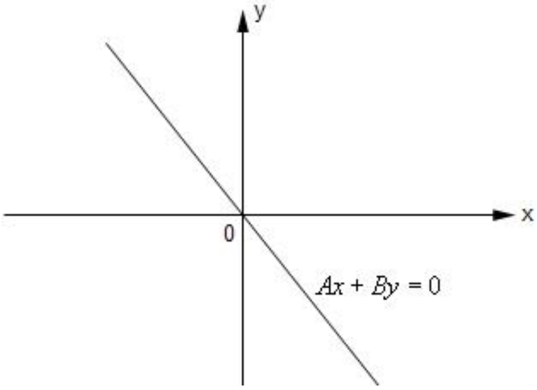

Рис. 8.2.1.

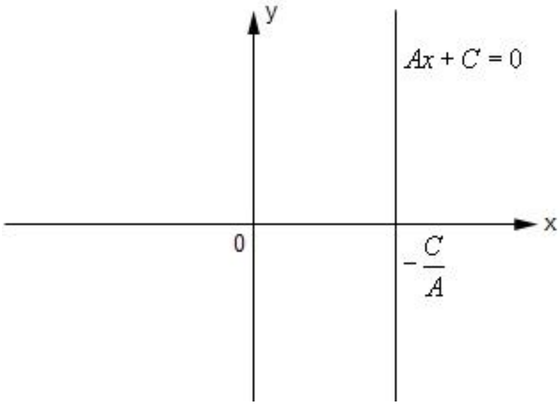

Рис. 8.2.2

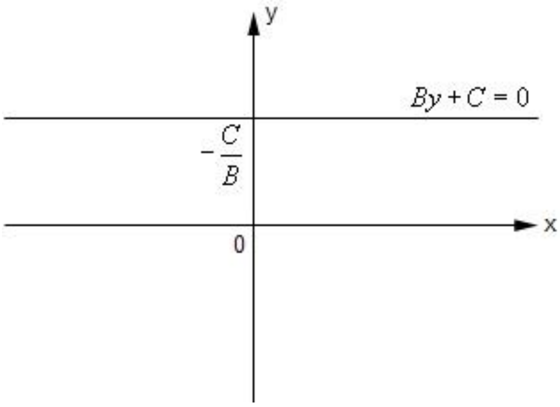

Рис. 8.2.3

У рівнянні $y = ax + b$ коефіцієнт a має геометричний сенс тангенса кута α нахилу прямої до осі абсцис, b - ордината точки її перетину з віссю ординат (рис. 8.2.4).

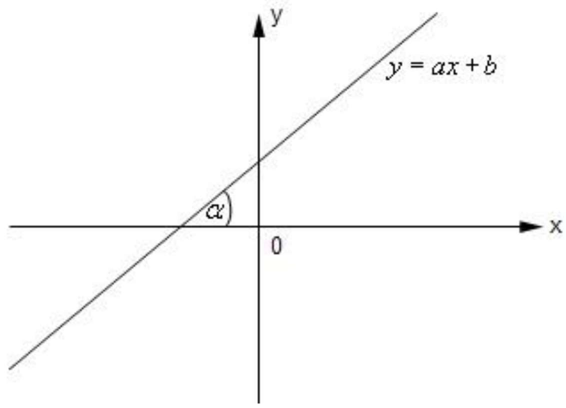

Рис. 8.2.4

Кутовим коефіцієнтом прямої *називають* коефіцієнт a, і в цьому випадку, рівняння прямої записують у вигляді $y = kx + b$, $k = tg\alpha$.

Якщо пряма проходить через $M_0(x_0, y_0)$ у заданому напрямі (тобто під даним кутом до осі абсцис), то її рівняння записують у вигляді: $y - y_0 = k(x - x_0)$, $k = tg\alpha$ (рис. 8.2.5).

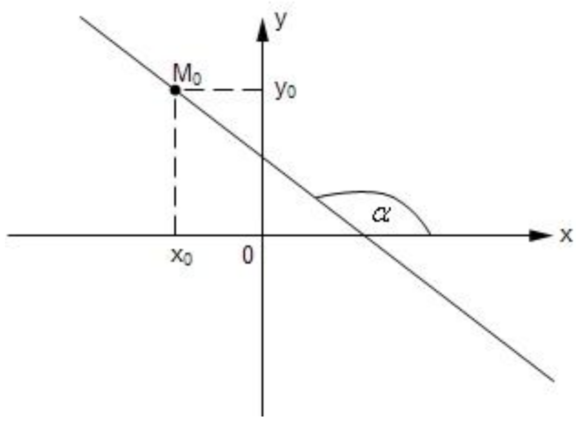

Рис. 8.2.5

Приклад 8.2.1.

Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2,3)$ з кутовим коефіцієнтом $k = -1$.

Розв'язок. $y - 3 = -1(x - 2)$, $x + y - 5 = 0$.

Якщо нас цікавить описання всіх прямих, що проходить через точку M_0, то маємо $y-y_0=p(x-x_0)$, де параметр p може змінюватись від $-\infty$ до $+\infty$. Така сукупність прямих *називається* **в'язкою.** Рівняння прямої, проведеної через дану точку у даному напрямі, може бути записано також у вигляді $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$, де $\bar{l}=\{m;n\}$ – **напрямний вектор** (вектор паралельний прямій).

Останнє рівняння, в свою чергу, може бути записане в **параметричному вигляді** $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \end{cases}$, параметр t може змінюватись від $-\infty$ до $+\infty$, кожній точці на прямій відповідає «своє» значення параметра.

Якщо пряма проходить через дві дані точки $M_1(x_1;y_1)$ та $M_2(x_2;y_2)$, то її рівняння має вигляд $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ (рис. 8.2.6).

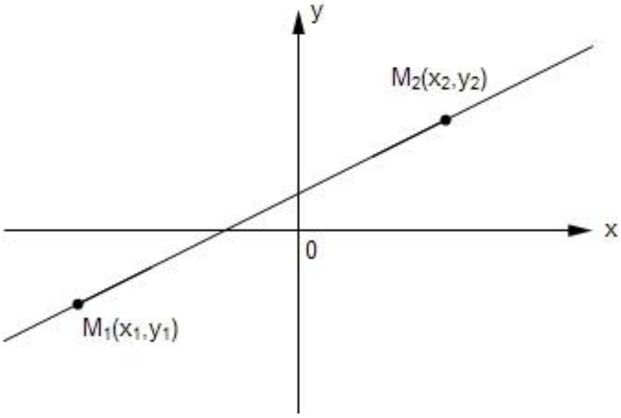

Рис. 8.2.6

Приклад 8.2.2.

Скласти рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(1;0)$, $M_2(5;4)$.

$\frac{x-0}{4-0}=\frac{y-1}{5-1}$, $x-y+1=0$.

Найзручнішим типом рівняння прямої з точки зору її побудови є **рівняння у відрізках** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, де a – абсциса точки перетину прямої з віссю абсцис; b – координата точки перетину прямої з віссю ординат (Рис. 8.2.7).

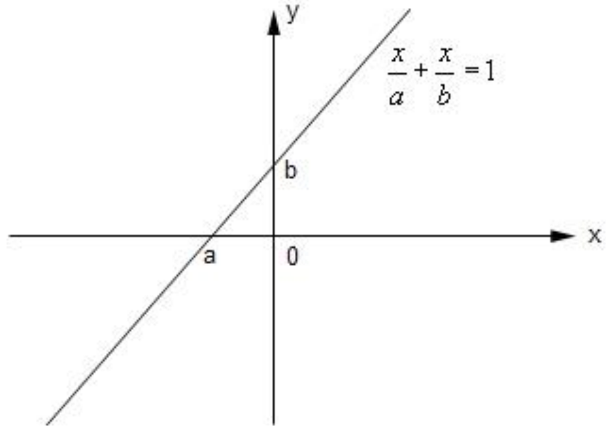

Рис. 8.2.7

Приклад 8.2.3.

Записати рівняння прямої $2x+3y-6=0$ у вигляді рівняння у відрізках .

Розв'язок. Переносячи вільний член $c=6$ у праву частину і ділячи на нього обидві частини рівності , маємо рівняння: $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$.

Практично важливим є питання про визначення кута між прямими (в тому числі, з'ясування того, чи вони є паралельними або перпендикулярними). При цьому слід пам'ятати, що пряма, задана рівнянням $Ax+By+C=0$ має **нормальний вектор** (тобто, вектор перпендикулярний до неї) $n=\{A;B\}$ і, таким чином, кут між двома прямими може бути визначений як кут між їх нормальними векторами. Найзручніше для визначення кута між прямими використовувати їх кутові коефіцієнти: якщо дві прямі мають кутові коефіцієнти k_1 та k_2, то кут α між ними визначається з рівності $\alpha = arctg\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$, при чому умовою паралельності є $k_1=k_2$, а перпендикулярності − $k_1k_2=-1$.

Приклад 8.2.4.

Визначити кут між прямими $x+3y=2$, $3y-x=4$.

Розв’язок. Кутові коефіцієнти $k_1=-\frac{1}{3}$, $k_2=3$. Отже, $k_1k_2=-1$ – прямі перпендикулярні.

8.3. Лінійна залежність в економіці

Розглянемо деякі приклади застосування лінійної залежності в економіці.

1. Якщо через k позначити тариф перевезення вантажу на одиницю відстані, b – витрати на перевезення вантажу, що не залежать від відстані x, то загальну вартість y перевезення вантажу на відстань x можна обчислити за формулою $y=kx+b$.

2. Якщо позначити через y витрати підприємства впродовж місяця при випуску x одиниць однорідної продукції, то y можна буде визначити за формулою $y=kx+b$, а величина kx буде визначати змінні витрати, що залежать від обсягу випуску (де k – витрати підприємства впродовж місяця на одиницю продукції). Величина b визначає постійні витрати підприємства, які не залежать від обсягу продукції, що випускається (витрати за рахунок амортизації будинку, заробітної платні охорони, службовців і допоміжних робітників, опалення будинків і т.п.)

Приклад 8.2.5.

Валова продукція на 1 га сільськогосподарських угідь за чотири роки збільшилась на 24,4%. Скласти рівняння прямої, яка відображає зміну валової продукції на 1 га протягом чотирьох років за умови, що валова продукція у відсотках змінюється пропорційно часу.

Розв’язок. Валову продукцію, отриману за рік до початку вказаного

чотирирічного періоду, приймемо за 100%
і знайдемо рівняння прямої у вигляді $y = kx + b$, де x означає кількість років.

Оскільки валова продукція y у відсотках змінюється пропорційно часу x, то одержимо:

$$k = \frac{y}{x} = \frac{24,4}{4} = 6,1.$$

Таким чином, шукане рівняння прямої набуде вигляду $y = 6,1x + 93,9.$

Приклад 8.2.6.

У 1980 р. держава мала 108,5 тисяч тракторів і одержала з одного гектара 8,5 ц зернових. У 1995 р. держава мала 510 тисяч тракторів і одержала з одного гектара 21 ц зернових. Чи сприяє зростання тракторного парка пропорційному зростанню врожайності зернових?

Розв'язок. Позначимо час – x, кількість тисяч тракторів – y; врожай, який одержали з одного гектара, позначимо – z (центнерів).

За умовою задачі маємо чотири точки:

$$A(x_1, y_1)\colon\ x_1 = 1980,\ y_1 = 108,5;$$
$$B(x_2, y_2)\colon\ x_2 = 1995,\ y_2 = 510;$$
$$M_1(x_1, z_1)\colon\ x_1 = 1980,\ z_1 = 8,5;$$
$$M_2(x_2, z_2)\colon\ x_2 = 1995,\ z_2 = 21.$$

Знайдемо рівняння прямих – графіків зростання тракторного парку та врожайності зернових з одного гектара за 1980–1995 роки у вигляді $y = kx + b$ – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

Використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві задані точки, одержимо:

$$\frac{x - 1980}{1995 - 1980} = \frac{y - 108,5}{510 - 108,5} \Rightarrow \frac{x - 1980}{15} = \frac{y - 108,5}{401,5};$$

$$401,5x - 401,5 \cdot 1980 = 15y - 15 \cdot 108,8;$$

$$15y = 401,5x - 793342,5;$$

$$y = \frac{401,5}{15} \cdot x - \frac{793342,5}{15}.$$

Таким чином, кутовий коефіцієнт прямої зростання тракторного парку буде:

$$k = \frac{401,5}{15} \approx 26,77.$$

Використовуючи точки M_1 та M_2, аналогічно знаходимо рівняння прямої зростання врожайності зернових з одного гектара.

$$\frac{x-1980}{1995-1980} = \frac{z-8,5}{21-8,5} \Rightarrow \frac{x-1980}{15} = \frac{z-8,5}{12,5};$$

$$12,5x - 12,5 \cdot 1980 = 15z - 15 \cdot 8,5;$$

$$15z = 12,5x - 24877,5;$$

$$y = \frac{12,5}{15} \cdot x - \frac{24877,5}{15}.$$

Отже, її кутовий коефіцієнт буде:

$$k = \frac{12,5}{15} \approx 0,83.$$

За умов задачі можна зробити висновок, що при зростанні тракторного парку врожайність зернових з 1 га зростає. Але кутовий коефіцієнт k_1 графіка зростання кількості тракторів значно більший за кутовий коефіцієнт k_2 графіка зростання врожайності зернових.

Таким чином, зростання тракторного парка сприяє зростанню врожайності зернових, але не пропорційно. Зростання кількості тракторів – зростання енергоозброєності сільського господарства не є основним факторам у підвищенні ефективності сільського господарства. Необхідно враховувати вплив інших факторів, наприклад, якості насіння, культуру агротехніки.

Контрольні запитання

1. Запишіть формули для координат точки, що ділить даний відрізок у даному співвідношенні.

2. Що таке рівняння лінії?
3. Яким є загальне рівняння прямої на площині?
4. Що таке кутовий коефіцієнт прямої, в яких рівняннях прямої він використовується? Записати параметричні рівняння прямої та пояснити їх зміст.
5. Який вигляд має рівняння прямої, що проходить через дві точки?
6. У чому практична зручність рівняння прямої у відрізках? Записати його. Як виглядає формула кута між прямими?
7. Записати умови паралельності та перпендикулярності двох прямих.
8. Наведіть приклади застосування лінійної залежності в економіці.