Лекція 9. Економічні задачі та геометричні образи другого порядку на площині

9.1. Геометричні образи другого порядку на площині.

А). Коло.

Б). Еліпс.

В).Гіпербола.

Г). Парабола.

9.2. Приклади задач економічного змісту, в яких використовуються криві другого порядку.

Коло, еліпс, гіпербола, парабола, як найпростіші нелінійні геометричні об'єкти на площині. Які основні характеристики кривих другого порядку? Як застосовуються криві другого порядку в задачах економічного змісту?

9.1. Геометричні образи другого порядку на площині

Геометричним образом другого порядку на площині є множина точок, координати яких задовольняють рівняння другого порядку:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a = 0$$

Можливі **випадки виродження** цього геометричного образу, наприклад:

- $x^2 + y^2 + 1 = 0$ – пуста множина,
- $x^2 + y^2 = 0$ – одна точка $(M(0;0))$,
- $x^2 - y^2 = 0$ – дві прямі, що перетинаються $(y = x, y = -x)$,
- $x^2 + 2xy + y^2 = 0$ – одна пряма $y = -x$,
- $x^2 + x = 0$ – дві паралельні прямі $x = 0$ та $x = -1$.

Виявляється, що єдиними **невиродженими геометричними образами другого порядку** є **криві другого порядку** – **еліпс, гіпербола, парабола**.

А). Найпростішою кривою другого порядку є **коло**. Якщо центр кола – точка $M_0(x_0, y_0)$, а радіус – R, то, враховуючи, що відстань від центру до біжучої точки $M(x, y)$ рівна R, маємо **рівняння кола** $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ (Рис.9.1.1):

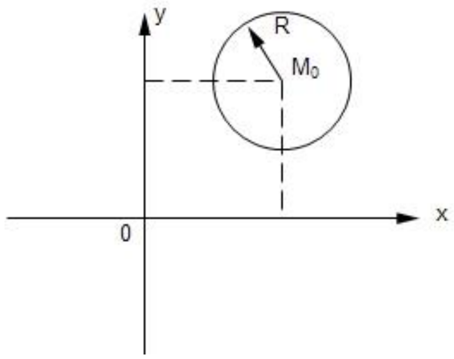

Рис**.** 9.1.1

Б). **Еліпсом** *<u>називають</u>* геометричне місце точок, для яких **сума відстаней до двох даних точок (фокусів) F_1 та F_2 є величина стала**. Якщо фокуси знаходяться на осі абсцис симетрично відносно початку координат, то маємо канонічне рівняння еліпса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (Рис. 9.1.2) .

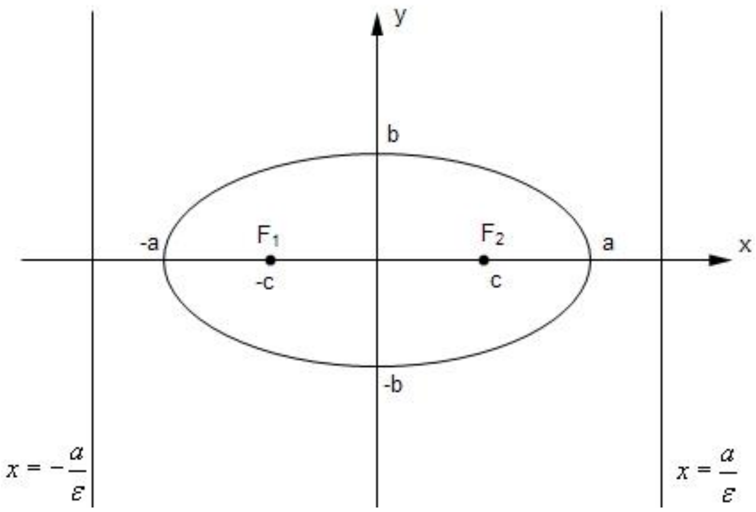

Рис. 9.1.2

Більшою та **меншою піввісями еліпса** *<u>називаються</u>* величини $a>0$ та $b>0$ $(a>b)$, відповідно, . Якщо абсциси фокусів – $\pm c$, то $c=\sqrt{a^2-b^2}$, а величина $\varepsilon=\frac{c}{a}$ *<u>називається</u>* **ексцентриситетом еліпса**. Зазначимо, що $0\le\varepsilon<1$ при $\varepsilon=0$ маємо $c=0$ (тобто фокуси співпадають) і еліпс перетворюється на коло (таким чином, він може розглядатись як результат певної деформації кола). Прямі

$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ *<u>називаються</u>* **директрисами еліпса** і мають наступну властивість: відношення відстаней довільної точки еліпса до ближчого фокусу та ближчої директриси дорівнює ексцентриситету.

Еліпс має також цікаву **оптичну властивість**. Якщо у його фокусі розмістити джерело світла, то промінь, після відображення від еліпса, пройде через другий полюс (Рис. 9.1.3).

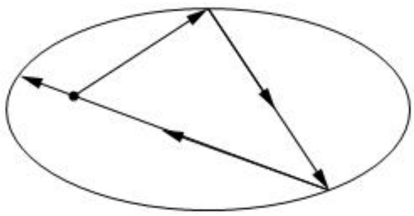

Рис. 9.1.3

Приклад 9.1.1.

Знайти осі, вершини, фокуси і ексцентриситет еліпса $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$.

<u>Розв'язок.</u> Перетворімо рівняння $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ таким чином:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

З одержаного канонічного рівняння еліпса знаходимо, що осі еліпса $(a = 3, b = 2)$

$$2a = 6, 2b = 4;$$

вершини еліпса

$$A_1(-3,0), A_2(0,3), B_1(0,-2), B_2(0,2).$$

Далі знаходимо

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}.$$

Отже, фокуси $F_1(-\sqrt{5},0), F_2(\sqrt{5},0)$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

В). Нехай знову маємо два полюси, розміщені на осі абсцис симетрично відносно початку координат.

Гіперболою *називається* геометричне місце точок, для яких **модуль різниці відстаней до полюсів є величина стала,** її **канонічне рівняння**: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (Рис. 9.1.4).

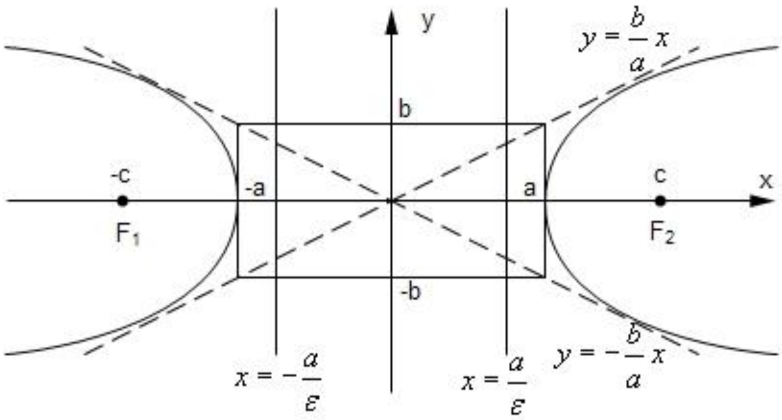

Рис. 9.1.4

Дійсною та **уявною півосями гіперболи** *називаються* відповідно величини $a>0$ та $b>0$. Якщо позначити сталу величину модуля різниці відстаней точки гіперболи до її фокусів через $2c$, то $c=\sqrt{a^2+b^2}$, **ексцентриситет гіперболи** визначається з рівності $\varepsilon=\frac{c}{a}$, $\varepsilon>1$. Аналогічно до того, що мало місце у випадку еліпса відношення відстаней довільної точки лінії до ближчих директриси та фокуса (останні знову визначаються рівностями $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$) дорівнює ексцентриситету.

Зазначимо, що на відміну від еліпса, який є замкненою лінією, гіпербола складається з **двох гілок** (**лівої** та правої) та має **асимптоти** $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Оптична властивість гіперболи полягає в тому, що промінь світла з джерела, яке знаходиться у фокусі, після відображення від лінії рухатиметься по прямій, що з’єднує точку його контакту з лінією з іншим полюсом.

Приклад 9.1.2.
Записати рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі абсцис симетрично

щодо початку координат, якщо відомо рівняння асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$ і віддаль між фокусами $2c=20$.

Розв'язок. Розміщення фокусів є канонічним, отже, рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

У цьому разі рівняння асимптот $y=\pm\frac{b}{a}x$ і $c^2=a^2+b^2$. З умов задачі випливає, що $c=10,\ \frac{b}{a}=\frac{4}{3}.$

Розв'язуючи систему щодо параметрів a і b:

$$\begin{cases} \frac{b}{a}=\frac{4}{3}, \\ a^2+b^2=100. \end{cases}$$

маємо $a=6, b=8.$ Тоді шукане рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1.$$

Г). Нехай, нарешті, маємо на осі абсцис точку $F(0;0)$ та перпендикулярну цій осі пряму $x=-\frac{p}{2}$.

Параболою *називається* геометричне місце точок рівновіддалених від цієї точки (фокуса) та прямої директриси (Рис.9.1.5)

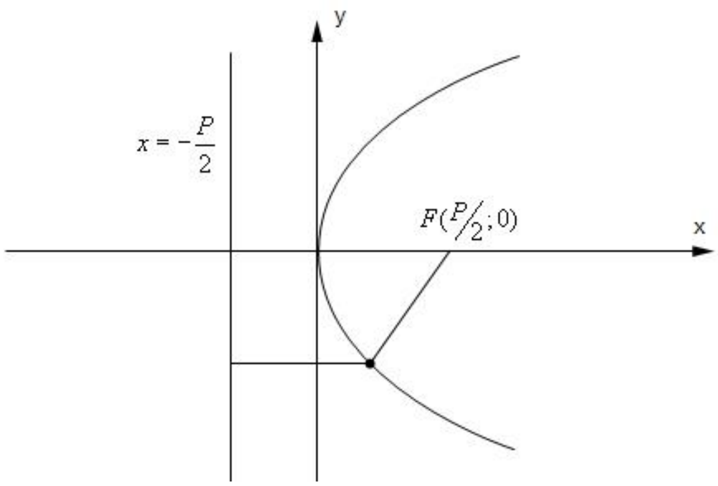

Рис 9.1.5

Канонічне рівняння параболи є $y^2 = 2p$, її ексцентриситет, за аналогією з попереднім, дорівнює 1 (це вказує на те, що парабола може розглядатись як проміжна ланка між еліпсом і гіперболою).

Оптична властивість параболи полягає в тому, що промінь світла з фокуса після відображення від неї рухається паралельно осі симетрії цієї лінії (Рис. 9.1.6).

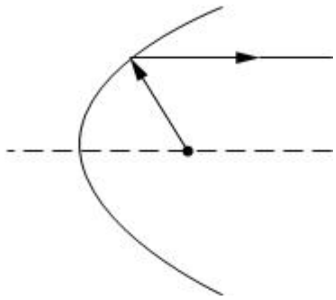

Рис. 9.1.6

Важливо!

Криві другого порядку мають також назву конічних перерізів, оскільки можуть виникати при перетині площини та конічної поверхні.

9.2. Приклади задач економічного змісту, в яких використовуються криві другого порядку.

Наведемо приклади задач економічного змісту, в яких застосовуються криві другого порядку.

Приклад 9.2.1.

Дослідженням виявлено, що витрати палива судном на підводних крилах є пропорційними квадрату швидкості судна. Знайти аналітичну залежність між витратами палива m та швидкістю судна V, враховуючи, що при $V = 40$ км/год витрачено 20 л палива за годину, а також визначити витрати палива за годину при швидкості 60 км/год.

Розв'язок. Згідно з умовою задачі шукану залежність можна записати у вигляді:

$$V^2 = km,$$

де *k* – деякий коефіцієнт пропорційності.

Порівняння цієї формули з рівнянням параболи $y^2 = 2px$ дозволяє зробити висновок, що витрати палива змінюються за параболічним законом. При $m = 0$ швидкість $V = 0$, тобто, парабола проходить через початок системи координат *mOV*. Згідно з умовою задачі парабола проходить через точку $M_0(20, 40)$, тому її координати задовольняють рівняння параболи:

$$40^2 = k \cdot 20 \Rightarrow k = 80.$$

Таким чином, аналітична залежність між витратами палива та швидкістю судна буде:

$$V^2 = m \cdot 80 \Rightarrow m = \frac{V^2}{80}.$$

З останньої формули випливає, що при швидкості 60 км/год витрати палива (у літрах) за годину повинні дорівнювати

$$m = \frac{60^2}{80} = 45 \text{ літрів.}$$

Розглянемо інші два приклади.

Приклад 9.2.2.

Два однотипних підприємства: A і B виробляють продукцію з однією і тією ж оптовою відпускною ціною m за один виріб на один кілометр шляху перевезення до підприємства. Однак автопарк, що обслуговує підприємство A, оснащений новішими та економічнішими автомобілями. Тому транспортні витрати на перевезення одного виробу складають на один кілометр шляху перевезення: для підприємства A – 10 грошових одиниць, а для підприємства B – 20 грошових одиниць. Відстань між підприємствами – 300 км. Як територіально має бути поділений ринок збуту між двома підприємствами для того, щоб витрати споживача на відвантаження виробів та їх транспортування були однаковими?

Розв'язок. Позначимо через S_1 і S_2 відстані до ринку від пунктів A і B відповідно. Тоді витрати споживачів складуть:

$$Y_1 = m + 10S_1; \;\; Y_2 = m + 20S_2.$$

Знайдемо множину точок $(x;y)$, для яких $Y_1 = Y_2$:

$$m + 10S_1 = m + 20S_2$$

або

$$S_1 = 2S_2.$$

Знайдемо S_1 і S_2:

$$S_1 = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$S_2 = \sqrt{(300 - x)^2 + y^2},$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(300 - x)^2 + y^2},$$

або, після піднесення до квадрата лівої та правої частин останньої рівності, групування та виділення повного квадрата за змінними x і y, матимемо:

$$(x - 400)^2 + y^2 = 200^2.$$

Це є рівнянням кола. Таким чином, для споживача "всередині кола" вигідніше купувати у пункті B, поза колом – у пункті A, а на колі – однаково вигідно і в пункті A, і в пункті B.

Приклад 9.2.3.

Нехай у момент часу $t = 0$ почалося постачання певного типу машин, які раніше не експлуатувалися. Припустимо, що їх отриманнявідбувається рівномірно за часом, річний обсяг постачання складає 1 млн грошових одиниць, а повний термін експлуатації машин складає 10 років. Визначити вартість машинного парку (за винятком суми амортизації) на кінець t-го року, припускаючи, що $t \in [0;10]$.

Розв’язок. Позначимо шукану вартість через y. Завдання полягає в тому, щоб знайти залежність $y = f(t)$. Вартість машинного парку на кінець t-го року без урахування зносу складає $t \cdot 10^6$, але фактично вартість машинного парку буде меншою внаслідок фізичного та морального зносів. Враховуючи, що машини були введені в експлуатацію не одночасно, будемо вважати, що середній вік машин складає $\frac{t}{2}$. Річний знос машини складає $\frac{1}{10}$ від її вартості. Тому в $t-$му році вартість зносу машинного парку складатиме

$$\frac{10^6 t}{10}\frac{t}{2} = 5 \cdot 10^4 \cdot t^2.$$

Таким чином, фактичну вартість у $t-$му році можна буде вираховувати за допомогою рівняння: $y(t) = 10^6 \cdot t - 5 \cdot 10^4 \cdot t^2$. Тобто функція залежності вартості машин від часу є квадратичною, а її графіком є парабола

Контрольні запитання

1. Що таке геометричні образи другого порядку? Наведіть приклади вироджених геометричних образів другого порядку.
2. Запишіть рівняння кола, наведіть геометричний зміст параметрів, що входять в нього.
3. Що таке еліпс, якими параметрами він задається? Зобразіть еліпс, укажіть його півосі, фокуси, директриси.
4. Що таке гіпербола, якими параметрами вона задається? Зобразіть гіперболу, вкажіть її півосі, фокуси, директриси, асимптоти.
5. Що таке парабола? Зобразіть її, вкажіть її фокус і директрису. В чому полягають оптичні властивості кривих другого порядку? Чому їх називають конічними?