Лекція 10. Економічні задачі та лінійні і найпростіші нелінійні геометричні образи у просторі

Площина та пряма у просторі як лінійні геометричні об'єкти у просторі. Які їх рівняння? Найпростіші нелінійні геометричні об'єкти у просторі - поверхні циліндричні, конічні, обертання.

10.1. Лінійні геометричні образи у просторі

Розглянемо спочатку геометричне місце точок, координати яких задовольняють рівнянню $Ax+By+Cz+D=0$ (A,B,C не всі рівні нулю).

Це геометричне місце точок є площиною, а саме рівняння називається **загальним рівнянням площини**. Аналогічно до того, як це робиться при розгляді прямої на площині, варто розглянути частинні випадки цього рівняння:

- при $D=0$ площина проходить через початок координат;
- при $A=0$ або $B=0$ або $C=0$ площина паралельна відповідно осі Ox, або осі Oy, або осі Oz;
- при рівності нулю одночасно двох коефіцієнтів (A та B, або B та C, або A та C) площина паралельна відповідно координатним площинам Oxy, Oxz або Oyz).

Приклад 10.1.1.

Площина $z-2=0$ паралельна площині Oxy і знаходиться над нею на відстані двох одиниць.

Площина однозначно визначається при заданні належної їй точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ та перпендикулярного їй вектора (**нормального вектора**) $\bar{n} = \{A, B, C\}$.

Якщо біжуча точка $M(x, y, z)$, то умова перпендикулярності векторів MM_0 та $\bar{n}$ має вигляд $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Таке рівняння називається рівнянням **площини, проведеної через дану точку перпендикулярно заданому вектору.**

Приклад 10.1.2.

Записати рівняння площини, перпендикулярної вектору $\bar{n} = \{2, 0, -1\}$ і яка проходить через точку $M_0(0, -1, 3)$.

Розв'язок.

$$2(x-0) + 0(y+1) + 1(z-3) = 0,$$

Звідси рівняння площини: $2x + z - 3 = 0$.

Три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, які не лежать на одній прямій, також однозначно визначають площину, якій належать. Рівняння **площини, проведеної через дані три точки** має вигляд

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Приклад 10.1.3.

Записати рівняння площини, що проходить через три точки $M_1(1,3,1)$, $M_2(-1,2,0)$, $M_3(0,1,0)$.

Розв'язок.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-1 \\ -1-1 & 2-3 & 0-1 \\ 0-1 & 1-3 & 0-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$=(x-1)+(y-3)+4(z-1)-(z-1)-2(y-3)-2(x-1)=-x-y+3z+2=0.$$

Найзручнішим (з точки зору графічного зображення площини) є **рівняння площини у відрізках**:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

де a, b, c - відповідно абсциса, ордината та апліката точок перетину площини з координатними осями (рис. 10.1.1).

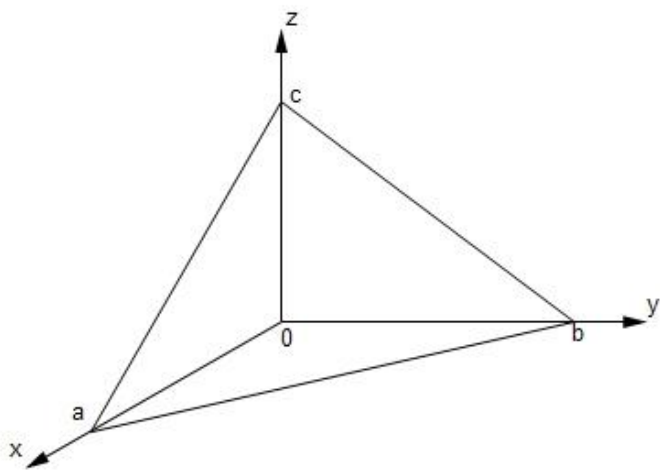

Рис . 10.1.1

Приклад 10.1.4.

Записати рівняння площини $2x+3y+5z-30=0$ у відрізках.

Розв'язок

$$\frac{x}{15}+\frac{y}{10}+\frac{z}{6}=1.$$

Важливими формулами, що стосуються площин у просторі, є формула відстані d від точки $M(x_0,y_0,z_0)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

та формула для знаходження кута α між площинами $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1 = 0$ та $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D_2 = 0$:

$$\alpha = \arccos\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Очевидно, що остання формула спирається на знаходження кута між площинами як кута між їх нормальними векторами.

Приклад 10.1.5.

Знайти кут між площинами $x + 3y + 5z + 7 = 0$ та $x - 2y + z + 71 = 0$.

Розв’язок

$$\alpha = \arccos\frac{1 - 6 + 5}{\sqrt{1 + 9 + 25}\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{\pi}{2}.$$

Пряма у просторі може визначатись як **лінія перетину двох площин** $\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1 = 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D_2 = 0 \end{cases}$, така система *називається* **загальними рівняннями прямої у просторі**.

Якщо пряма задається за допомогою точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ та паралельного їй **напрямного вектора** $\bar{l} = \{m, n, p\}$, то її рівняння мають вигляд

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

і *називаються* **канонічними**.

Приклад 10.1.6.

Записати канонічне рівняння прямої $\bar{l} = \{3, 0, -2\}$, $M_0(2, -3, 0)$.

Розв’язок

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y + 3}{0} = \frac{z}{-2}.$$

Якщо задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$, що належать прямій, то **рівняння прямої, що проходить через дві точки** записується у вигляді

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Приклад 10.1.7.

Записати рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(1,2,3)$ та $M_2(4,5,6)$.

Маємо

$$\frac{x-1}{4-1}=\frac{y-2}{5-2}=\frac{z-3}{6-3}, \text{ або}$$

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{3}.$$

З канонічних рівнянь прямої випливають **параметричні**:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt \; , t \in (-\infty, \infty). \\ z = z_0 + nt, \end{cases}$$

Останній тип рівнянь зручний, наприклад, для знаходження точки перетину прямої з площиною.

Приклад 10.1.8.

Знайти точку перетину прямої

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 4t, \quad t \in (-\infty, \infty). \\ z = 2 - 5t, \end{cases}$$

з площиною $2x + 3y + z - 15 = 0$.

<u>Розв'язок</u>

$$2(1+2t) + 12t + 2 - 5t - 15 = 0.$$

Звідки $t = 1$, отже

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 4, \; . \\ z = -3. \end{cases}$$

Кути між прямими визначаються як кути між їх напрямними векторами:

$$\varphi = \arccos\frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}},$$

де φ – кут між прямими, напрямні вектори яких $\bar{l}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$, $\bar{l}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$.

10.2. Найпростіші нелінійні геометричні образи у просторі

Зрозуміло , що поверхня другого порядкує поверхнею, рівняння якої містить хоча б одну з координат x, y, z у другому степені, а решту у першому або нульовому. Найпростішою нетривіальною (тобто такою, що не зводиться до площин та більш простих геометричних образів) поверхнею другого порядку є сфера – **геометричне місце точок, рівновіддалених від заданої точки - її** центра. Якщо центр сфери – точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, а радіус R, то рівняння сфери має вигляд:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Циліндричною поверхнею *називається* така поверхня, яка утворена рухом прямої (**твірної)** паралельно до заданої лінії L з одночасним перетином заданої лінії l (**напрямної**).

Якщо, наприклад, напрямна є коло $x^2 + y^2 = R^2$ на площині Oxy і рух відбувається паралельно осі аплікат, то отримуємо **пряму кругову циліндричну поверхню**, рівняння якої є $x^2 + y^2 = R^2$ (Рис. 10.2.1)

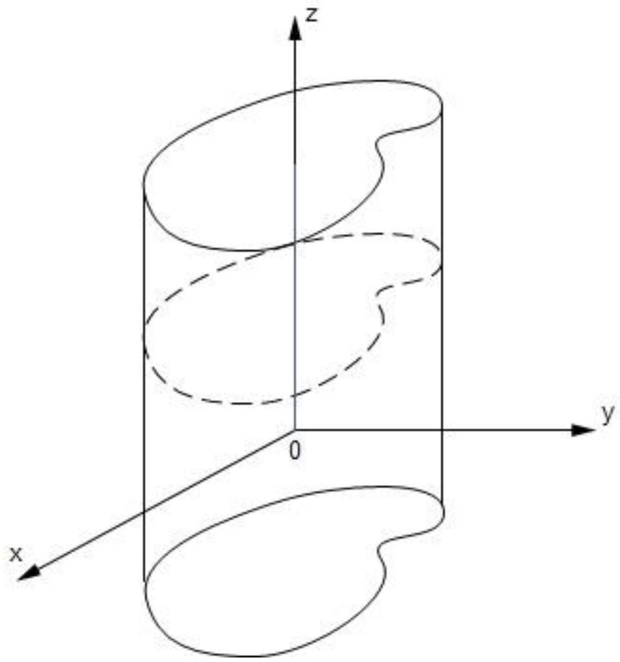

Рис. 10.2.1.

Конічною поверхнею *<u>називається</u>* поверхня, утворена рухом прямої (**твірної**), яка перетинає **напрямну** і проходить через задану точку – **вершину конічної поверхні**.

Нехай напрямною є знову ж таки коло $x^2+y^2=R^2$, а вершиною – $M_0(0;0;1)$, тоді маємо **пряму кругову конічну поверхню**, рівняння якої $x^2+y^2=R^2(z-1)^2$ (Рис. 10.2.2).

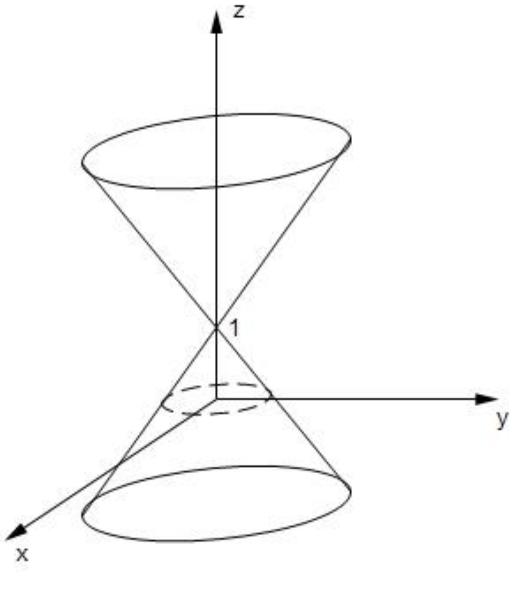

Рис. 10.2.2

Поверхнею обертання *називають* поверхню, яка утворена обертанням (рухом по колу) всіх точок деякої лінії навколо заданої **осі обертання**. Нехай, наприклад, маємо параболу $y^2 = 2px$ на площині Oxy, а вісь обертання – вісь абсцис. Тоді при обертанні утворюється круговий параболоїд, рівняння якого є $y^2 + z^2 = 2px$ (Рис 10.2.3).

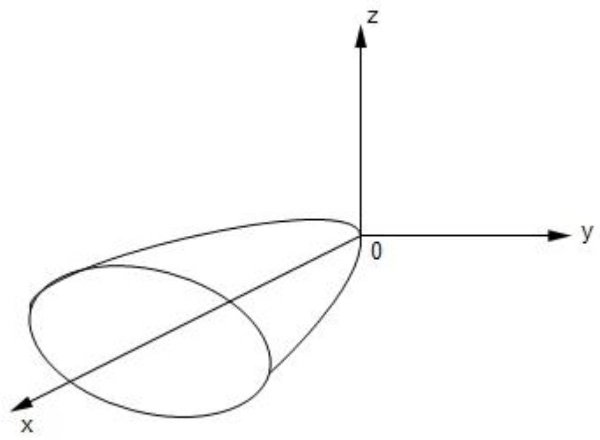

Рис. 10.2.3

Рівняння поверхні обертання навколо однієї з координатних осей записується за **наступним правилом**:

Алгоритм

1) ***В рівнянні лінії обертання координата, однойменна з віссю обертання залишається незмінною;***
2) ***Другу координату в рівнянні лінії обертання замінюють на плюс-мінус корінь квадратний із суми квадратів решти (крім згаданої в першому пункті) координат.***

10.3. Використання тривимірних геометричних образів в економічних дослідженнях.

Прикладні та теоретичні дослідження у галузі економіки та бізнесу оперують функціональними залежностями між економічними показниками. До таких найуживаніших залежностей належать виробничі функції, які виражають максимально можливий випуск деякої продукції за певною технологією відповідно до кількостей використаних ресурсів. Частіше за все використовують трифакторні функції, вважаючи об'єм випуску продукції Q є залежним від вкладених трудових ресурсів L, капіталовкладень K та об'єму використаних матеріалів і сировини M. Враховуючи бюджетні обмеження, можна записати, що

$$AL + BK + CM \le D,$$

де:

D - доступний об'єм фінансових ресурсів;

A - вартість одиниці трудового ресурсу;

B - вартість одиниці залученого капіталу;

C - вартість одиниці використовуваної сировини чи матеріалу.

Умовою повного використання фінансового ресурсу є рівність:

$$AL + BK + CM = D.$$

Геометрично ця рівність зображується площиною у тривимірному просторі з координатними осями OK, OL, OM, а точніше, частиною цієї площини, розташованою у першому октанті.

При дослідженні діяльності певної економічної структури враховують діючі обмеження на кожен з факторів виробництва. Так, наприклад, значення виробничої функції у точці $P(D/A, 0, 0)$ визначає можливий об'єм випуску продукції без залучення сторонніх фінансів, сировини та матеріалів. Першочергово важливою при цьому є задача максимізації випуску продукції, тобто вибір на частині вказаної площини, розміщеної у першому октанті, точки P^*, у якій виробнича функція досягає свого найбільшого значення.

Нехай далі маємо виробничу структуру, яка характеризується точкою $P_0(L_0, K_0, M_0)$ у описаному вище тривимірному просторі. Тоді стратегія розвитку такого виробництва визначається сукупністю залежностей зміни факторів виробництва від часу:

$$L(t) = L_0 + lt,$$

$$K(t) = K_0 + kt,$$

$$M(t) = M_0 + mt.$$

Це означає, що точка $P(t) = (L(t), K(t), M(t))$, яка описує об'єми факторів виробництва у момент часу t знаходиться на прямій

$$\frac{L-L_0}{l}=\frac{K-K_0}{k}=\frac{M-M_0}{m}$$

у описаному вище тривимірному просторі . У такому випадку координати напрямного вектору цієї прямої $\vec{a}=(l,k,m)$ є швидкостями отримання або відтоку відповідних виробничих ресурсів.

Якщо досліджується двофакторна модель виробництва, то, приміром, виробнича функція Кобба-Дугласа

$$Q=AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

при $\alpha=\frac{1}{2}$ являє собою рівняння гіперболічного параболоїда у тривимірному просторі з координатними осями OK, OL, OQ. Таким чином, максимальний об'єм продукції за наявності факторів $K=K_0, L=L_0$ являє собою ординату точки вказаної поверхні, яка знаходиться над точкою $M_0(K_0,L_0)$ на площині координатних осей OK та OL.

Контрольні запитання

1. Який вигляд має загальне рівняння площини у просторі? Записати рівняння площини, яка проходить через задану точку, перпендикулярно до заданого вектору?
2. Який вигляд має рівняння площини, проведеної через три точки, рівняння площини у відрізках? За якими формулами знаходять відстань між точкою ї площиною, кут між двома площинами?
3. Як задається пряма у просторі, Що таке загальне рівняння прямої? Записати рівняння прямої, проведеної через дві задані точки. Який вигляд параметричного та канонічного рівнянь прямої? Запишіть формулу кута між двома прямим у просторі.
4. Запишіть рівняння сфери, поясніть геометричний сенс його параметрів.
5. Дайте означення циліндричної поверхні, наведіть приклади.
6. Що таке конічна поверхня? Наведіть приклади. Що таке поверхня обертання? За яким правилом знаходять рівняння поверхні обертання у найпростішому випадку?