Лекція 11. Додаткові питання аналітичної геометрії. Застосування криволінійних систем координат на площині та у просторі. Аналітична геометрія в n-вимірному просторі

Приклади криволінійних систем координат. Як пов'язані декартова система координат з циліндричною? Як виглядає рівняння сфери в сферичній системі координат? Аналітична геометрія n*-вимірного простору*

11.1. Деякі криволінійні системи координат на площині та у просторі

Полярна система координат на площині задається за допомогою довільної точки O – **полюсу** і **променя** OP -**полярної осі,на якій вказано одиницю вимірювання довжини** (Рис. 11.1.1) .

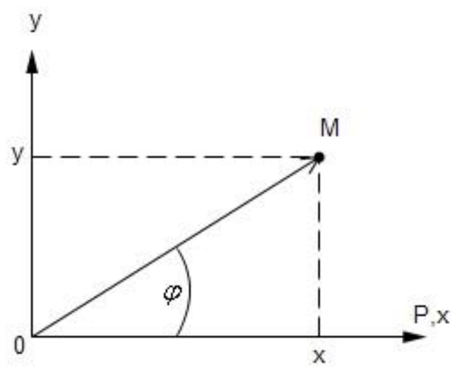

Рис. 11.1.1

Положення довільної точки M на площині однозначно визначається її **полярними координатами** (Рис. 11.1.2): довжиною відрізка OM − **полярним**

радіусом, та кутом між полярною віссю та вектором OM (**полярним кутом**, обчислюється проти годинникової стрілки). Ясно, що $\rho \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Якщо розмістити на площині одночасно полярну систему координат та прямокутну декартову, сумістивши полюс з початком координат, а полярну вісь – із додатною піввіссю абсцис, то маємо наступний розв'язок між полярними та декартовими координатами: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, і навпаки

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \varphi = \begin{cases} \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{при } y \geq 0; \\ 2\pi - \arccos\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{при } y < 0 \end{cases}.$$

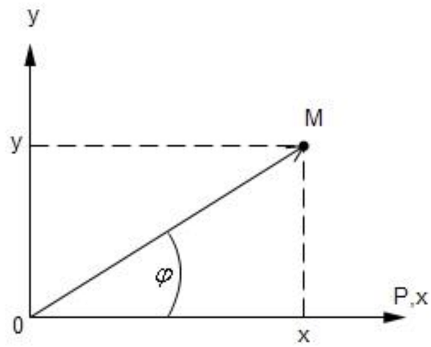

Рис. 11.1.2

Деякі лінії зручно задавати саме за допомогою полярних координат , тобто рівняннями $\rho = f(\varphi)$. Наприклад, рівняння кола радіуса R з центром в початку координат має вигляд $\rho = R$ (Рис.11.1.3).

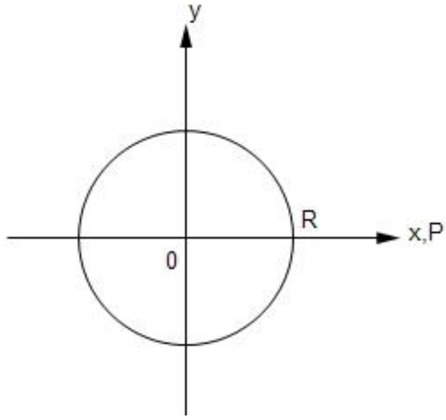

Рис. 11.1.3

Рівняння $(x^2 + y^2) = a^2(x^2 - y^2)$ **Лемніскати Бернуллі** $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ (Рис. 11.1.4).

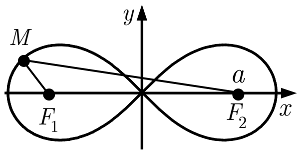

Рис. 11.1.4

Зрозуміло, що **поверхня другого порядку** є поверхня, рівняння якої містить хоча б одну з координат x, y, z в другому степені, а решту – в першому або нульовому. Найпростішою нетривіальною (тобто такою, що не зводиться до площин та більш простих геометричних образів) поверхнею другого порядку є **сфера – геометричне місце точок, рівновіддалених від заданої точки** – її. Якщо центр сфери – точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, а радіус R, то рівняння сфери має вигляд:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

Циліндрична система координат у просторі визначається за допомогою полярної системи координат на площині та осі аплікат. Таким чином, координати точки в просторі є ρ, φ, z. Наприклад, рівняння циліндра $x^2+y^2=R^2$ (Рис. 11.1.5) в цій системі координат матиме вигляд $\rho=R$, а рівняння конуса $x^2+y^2=z^2$ – $\rho=\pm z$ (Рис. 11.1.6).

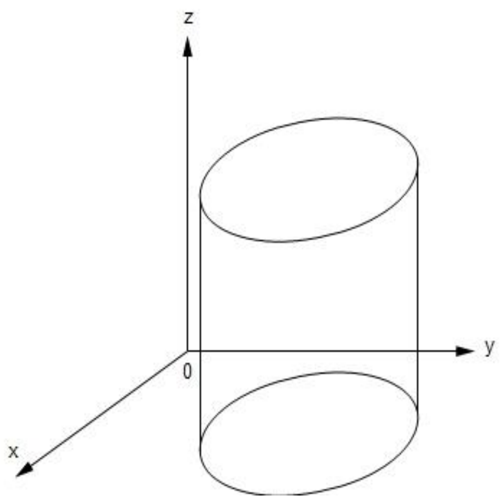

Рис. 11.1.5

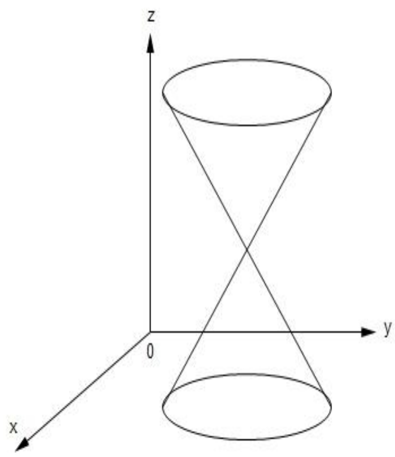

Рис. 11.1.6

Сферична система координат у просторі запроваджується за допомогою фіксованої точки O (полюса), полярної осі OP та полярної площини, на якій лежить полярна вісь (та, відповідно, полюс). Положення довільної точки M (Рис. 11.1.7) у просторі визначається довжиною r вектора $\overline{OM}$ (полярним радіусом) і кутом θ (між $\overline{OM}$ та полярною лощиною) та φ (між полярною віссю та проекцією

$\overline{OM}$ на полярну площину). Якщо сумістити початок прямокутної декартової системи координат з полюсом, а полярну вісь з віссю абсцис, то маємо

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta, \\ y = \sin\varphi\sin\theta \quad , r \geq 0, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], \\ z = r\sin\theta. \end{cases}$$

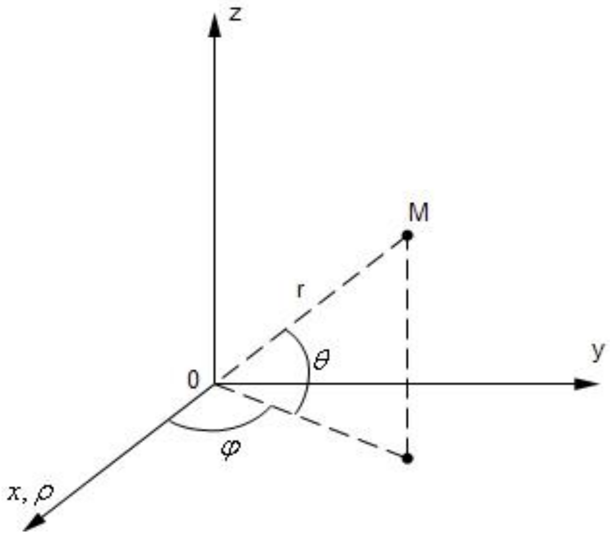

Рис. 11.1.7

У сферичній системі координат, наприклад, рівняння сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ має вигляд $r = R$.

11.2. Аналітична геометрія в $\underline{n}$-вимірному просторі

Нехай в n-вимірному просторі R^n запроваджено скалярний добуток: якщо $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$, то $\overline{a} \cdot \overline{b} = \{a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_n b_n\}$.

Запроваджена таким чином операція має властивості комутативності, дистрибутивності і $(\overline{a} \cdot \overline{a}) > 0$, якщо $\overline{a}$ – не нульовий елемент.

Будемо називати простір R^n, в якому запроваджений скалярний добуток, **евклідовим n-вимірним простором** і позначати E^n.

Для евклідових просторів можна визначати **норму елемента** (аналог довжини вектора) за формулою $\|\overline{a}\| = \sqrt{\overline{a} \cdot \overline{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$. При цьому:

1. $\|\bar{a}\| = 0$ тільки якщо $\bar{a} = \bar{0}$.
2. $\|\lambda \bar{a}\| = |\lambda| \cdot \|\bar{a}\|$, де μ – дійсне число.
3. $\|\bar{a} \cdot \bar{b}\| \le \|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\|$ – нерівність Коші-Буняковського.
4. $\|\bar{a} + \bar{b}\| \le \|\bar{a}\| + \|\bar{b}\|$ – нерівність трикутника.

Виходячи з цих властивостей та згадуючи найпростіші задачі аналітичної геометрії можна визначити **відстань між елементами $\bar{a}$ та $\bar{b}$:**

$$d_{\bar{a},\bar{b}} = \|\bar{a} - \bar{b}\|,$$

кут α між елементами $\bar{a}$, $\bar{b}$:

$$\alpha = \arccos \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\bar{a} \cdot \bar{b}},$$

при цьому елементи *<u>називаються</u>* **ортогональними**, якщо $\alpha = \frac{\pi}{2}$ та **колінеарними**, якщо $\alpha = 0$.

Геометричним образом в такому просторі є, наприклад, **гіперплощина** – сукупність елементів (точок) $\{x_1, \ldots, x_n\}$ для яких $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + b = 0$, де $a_1, \ldots, a_n, b$ – деякі дійсні числа.

11.3. Використання полярних координат для відображення залежності в економічній сфері

Графічне зображення закономірностей, що фігурують в економічному аналізі, має такі істотні риси як наочність, виразність зручність для запам'ятовування. Наразі все більш широке застосування при цьому знаходять радіальні діаграми. Традиційно вони використовуються для відображення періодичних залежностей, наприклад, споживання електроенергії від часу протягом доби, інтенсивності завантаження підприємств з переробки сільгосппродукції протягом року та інші. Останнім часом спірального типу лінії(наприклад, проста спіраль $\rho = a$) все частіш представляють динаміку розширеного простого або звуженого відтворення. На рис.11.1.8 зображено залежність завантаженості енергосистеми країни від часу доби.

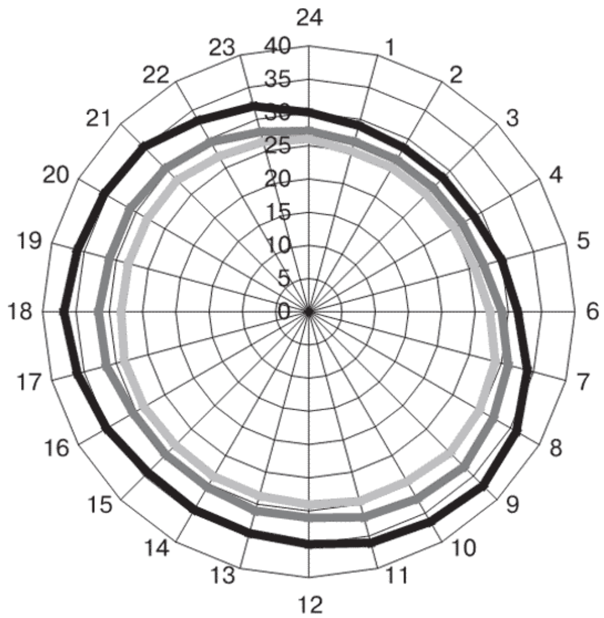

Рис. 11.1.8

Розглянемо додатково до попереднього ще одну модель. Нехай на деякій території розташована магістраль, яка має форму прямої, та точковий об'єкт, що забезпечують постачання однорідних товарів або послуг. Умови придбання цих товарів або послуг означають для клієнта, що знаходиться на цій території, відсутність різниці між виходом на магістраль або виходом у точку при відношенні відстаней до них $\frac{r}{d} = \varepsilon$, де r - відстань до точкового об'єкту, а d - відстань до магістралі. Тоді, розташувавши полюс полярної системи координат у точці знаходження точкового об'єкту та направивши полярну вісь від нього перпендикулярно магістралі, отримуємо лінію байдужості з рівнянням:

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

яка є кривою другого порядку, де при $\varepsilon = 0$ маємо дугу кола, при $0 < \varepsilon < 1$ - частину еліпса, при $\varepsilon = 1$ дугу параболи, а при $\varepsilon > 1$ - гілку гіперболи. Параметр p у випадку кола дорівнює його радіусу, а для еліпса і гіперболи - $p = \frac{b^2}{a}$.

Контрольні запитання

1. Що таке полярна система координат? Наведіть приклади рівнянь лінії в цій системі координат.
2. Що таке циліндрична система координат? Наведіть приклади її використання. Що таке сферична система координат? Коли її використовують?

3. Що таке евклідів n- вимірний евклідів простір? Як знаходиться норма його елемента, відстань та кут між елементами?