

Лекція 12. Спеціальні моделі аналітичної геометрії в економічних задачах

12.1. Модель рівноваги ринку

12.2. Модель рівноваги доходів і витрат

Як визначається рівноважна ціна? Що називають точкою рівноваги? В чому полягає модель рівноваги доходу та збитків?

12.1. Модель рівноваги ринку

Розглянемо деякий товар. За даної ціни p за одиницю товару через $s(p)$ позначимо число одиниць товару, які продавці на ринку пропонують для продажу. Функцію $s = s(p)$ називають **функцією пропозиції товару**. Через $q(p)$ позначимо число одиниць товару, які покупці бажають купити за даною ціною p . Функцію $q = q(p)$ називають **функцією попиту на товар**. З економічних міркувань функція пропозиції $s = s(p)$ зростаюча, а функція попиту $q = q(p)$ спадає.

Ціну, за якої попит на певний товар дорівнює пропозиції цього товару на ринку, називають **рівноважною ціною**. Тобто за рівноважної ціни p^* виконується рівність $s(p^*) = q(p^*)$. Точку $E(p^*; q^*)$ називають **точкою рівноваги**. (Рис. 12.1.1)

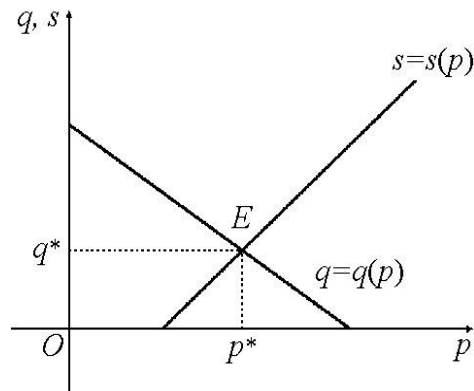


Рис. 12.1.1

Приклад 12.1.1.

За умови, що функція попиту має вигляд, $q = -5p + 40$, а функція пропозиції $s = 7,5p - 10$, визначити рівноважну ціну. Нехай уряд деякої країни встановив акцизний податок T за одиницю товару (цей податок є фіксованим числом, а не процентом від продажної ціни). З'ясувати, як зміняться при цьому рівноважна ціна та обсяг товару.

Розв'язок. Координати точки рівноваги $E(p^*, q^*)$ задовольняють умову рівноваги $s(p^*) = q(p^*)$, тобто

$$7,5p - 10 = -5p + 40,$$

звідки

$$p^* = 4, \quad s(p^*) = q(p^*) = 20.$$

Якщо уряд установить акцизний податок T за одиницю товару, то функція пропозиції зміниться і задаватиметься співвідношенням

$$s = s(p - T) = 7,5(p - T) - 10,$$

а функція попиту залишиться незмінною. Тоді нову точку рівноваги (p^T, q^T)

можна визначити з умови рівноваги $s(p^T) = q(p^T)$, тобто

$$7,5(p^T - T) - 10 = -5p^T + 40.$$

Отже, нова рівноважна ціна $p^T = 4 + 0,6T$, а відповідний обсяг товару

$s(p^T) = q(p^T) = 20 - 3T$. Дістали нову точку рівноваги

$$(4 + 0,6T, 20 - 3T).$$

12.2. Модель рівноваги доходів і витрат

Розглянемо просту модель рівноваги доходів і витрат компанії. Компанія випускає продукцію й продає її за ціною p грн. за одиницю. Керівництво компанії встановило, що зміна суми y_g загальних щомісячних витрат на виготовлення продукції в кількості x тис.од. має таку закономірність: $y_g = ax + b$. Знайдемо точку рівноваги, області прибутків і витрат компанії.

Оскільки дохід від продажу x тис. виробів продукції ціною p грн. за одиницю визначатиметься функцією доходу $y_d = px$, то для рівноваги доходів і витрат потрібно, щоб виконувалась умова рівноваги $y_g = y_d$. (Рис. 12.2.1)

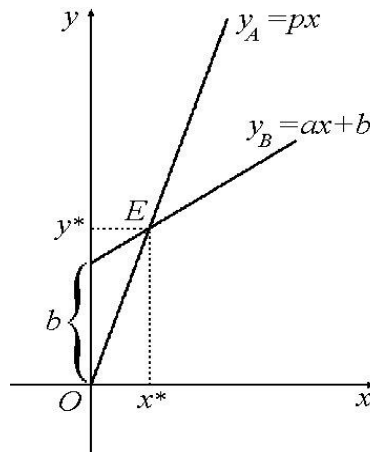


Рис. 12.2.1

Знаходимо розв'язок рівняння $px = ax + b$. Маємо

$$x^* = \frac{b}{p - a}.$$

Отже, визначили точку рівноваги

$$E\left(\frac{b}{p-a}; \frac{pb}{p-a}\right).$$

Прибуток Q компанії визначається рівністю

$$Q = y_d - y_c.$$

Якщо $0 \leq x \leq x^*$, то графік функції доходу проходить нижче за графік функції витрат. Тоді $Q < 0$, і компанія несе збитки.

Якщо $x > x^*$, то графік функції доходу проходить вище за графік функції витрат. Тоді $Q > 0$, і компанія одержує прибуток.

Приклад 12.2.1.

Побудувати графіки транспортних витрат та визначити, для яких відстаней вигідніше перевозити залізничним або автомобільним транспортом. Якщо транспортні витрати перевезення одиниці вантажу y залізничним та автомобільним транспортом на відстань x визначаються за формулами:

$$y = \frac{1}{2}x + 10 \quad \text{та} \quad y = x + 5,$$

де x вимірюється десятками км.

Розв'язок Побудуємо графіки транспортних витрат перевезення (Рис. 12.2.2).

Графіки прямих перетинаються в точці N . Знайдемо координати точки N :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x + y = 10 \\ -x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 20 \\ x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow y = 15; x = 10.$$

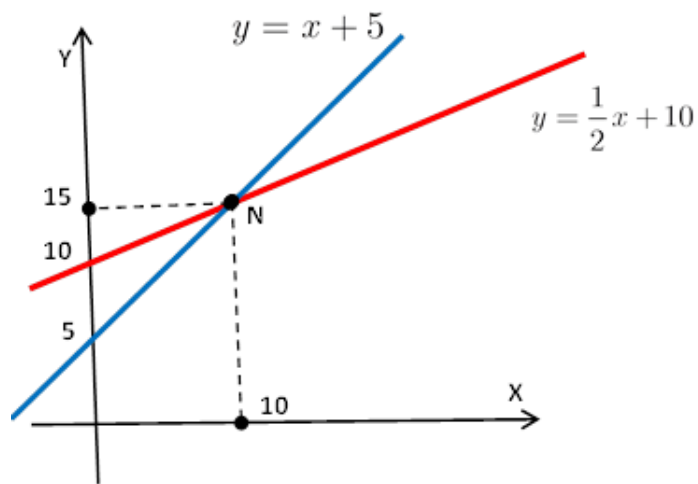


Рис. 12.2.2

Графіки витрат дозволяють зробити висновки:

- а) коли $x \in [0,10)$, тобто $x < 100$ км, транспортні витрати у перевезення автотранспортом нижче витрат перевезення залізничним транспортом;
- б) коли $x \in [10,\infty)$, тобто $x > 100$ км, більш рентабельним буде залізничний транспорт.

Розглянемо модель, в якій загальні щотижневі витрати задаються квадратичною функцією.

Приклад 12.2.2.

Компанія виробляє вироби A та продає їх по 2 долари за кожний. Керівництво компанії встановило, що сума Y_B загальних щотижневих витрат (в доларах) на виготовлення виробів A кількістю x тисяч одиниць має таку закономірність

$$Y_B = 1000 + 1300x + 100x^2.$$

Визначити щотижневу кількість виготовлення та продажу виробів A , яка забезпечує рівновагу витрат та доходу.

Розв'язок Дохід від продажу x тисяч виробів A вартістю 2 долари за кожний буде:

$$Y_D = 2000x.$$

Для рівноваги доходу та витрат треба щоб виконувалась рівність:

$$Y_B = Y_D \Rightarrow 1000 + 1300x + 100x^2 = 2000x,$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0,$$

$$x_1 = 2; x_2 = 5.$$

Отже, ця задача має дві точки рівноваги. Компанія може виробляти 2000 ($x_1 = 2$) виробів A з доходом та витратами 4000 доларів, або 5000 ($x_2 = 5$) виробів з доходом та витратами 10000 доларів.

Розглянемо на цьому прикладі можливості компанії. Позначимо щотижневий прибуток P , тоді

$$\begin{aligned} P &= Y_D - Y_B = 2000x - (1000 + 1300x + 100x^2) = \\ &= -1000 + 700x - 100x^2 = -100(x - 2)(x - 5). \end{aligned}$$

З останньої рівності випливає, що $x = 2$ або $x = 5$ маємо $P = 0$, тобто ці значення x будуть точками рівноваги.

Коли $2 < x < 5$, тоді $x - 2 > 0$, $x - 5 < 0$ і маємо $P > 0$, тобто компанія одержить прибуток. При інших значеннях x , тобто коли $x \notin [2; 5]$ будемо мати $P < 0$ – компанія несе витрати.

Контрольні запитання

1. Якими є умови рівноваги доходу та витрат?
2. Що називають точкою рівноваги?
3. Як визначається функція пропозиції товару та функція попиту на товар?