Лекція № 3

3.1. Незміщенність точкових оцінок
3.2. Консистентність
3.3. Асимптотична нормальність

3.1. Незміщенність точкових оцінок

Перш за все розглянемо незміщенність.

Означення 1

Оцінка θ^* параметра θ називається незміщеною, якщо

$$E\theta^* = \theta.$$

Означення 2

Оцінка θ^* параметра θ називається асимптотично незміщеною, якщо

$$\lim_{n\to\infty} E\theta^* = \theta.$$

3.1. Незміщенність точкових оцінок

Дослідимо на незміщенність та асимптотичну незміщенність вибіркові моменти:

- Для вибіркового середнього $\overline{\xi}$

$$E\overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E\xi_j = E\xi_1 = a,$$

тобто $\overline{\xi}$ є незміщеною оцінкою математичного сподівання a;

- Для вибіркового моменту k-го порядку $\overline{\xi^k}$

$$E\overline{\xi^k} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E\xi_j^k = E\xi_1^k = m_k,$$

тобто $\overline{\xi^k}$ є незміщеною оцінкою моменту k-го порядку m_k;

- Для вибіркової дисперсії $\mathfrak{D}_\xi^*$

$$E\mathfrak{D}_\xi^* = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E\left(\xi_j - a\right)^2 = D\xi_1 = \sigma^2,$$

тобто $\mathfrak{D}_\xi^*$ є незміщеною оцінкою дисперсії σ^2;

Продовжуємо дослідження:

- Для вибіркової дисперсії $\mathfrak{D}^{**}_{\xi} = s^2$

$$Es^2 = \frac{n-1}{n} D\xi_1 = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2,$$

  але

$$Es^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \to \sigma^2, \ n \to \infty,$$

  тобто s^2 є зміщеною, але асимптотично незміщенною оцінкою дисперсії σ^2;

- Для вибіркової дисперсії $\mathfrak{D}^{***}_{\xi} = s_0^2$

$$Es_0^2 = E\frac{n}{n-1}s^2 = \sigma^2,$$

  тобто s_0^2 є незміщеною оцінкою дисперсії σ^2.

3.1. Незміщенність точкових оцінок

Нехай генеральна сукупність має рівномірний розподіл $\xi_j \sim U(0, \theta)$. Дослідимо на незміщенність та асимптотичну незміщенність ОММ $\theta^* = 2\overline{\xi}$ та ОМВ $\theta^{**} = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$. Очевидно,

$$E\theta^* = 2E\overline{\xi} = 2E\xi_1 = \theta,$$

тобто θ^* є незміщенною оцінкою θ.
Можна показати, що щільність розподілу θ^{**} має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & x \in (0, \theta); \\ 0, & x \notin (0, \theta); \end{cases}$$

Тоді,

$$E\theta^{**} = \int_0^\theta \frac{nx^n}{\theta^n} dx = \frac{n}{n+1}\theta \neq \theta,$$

але

$$E\theta^{**} = \frac{n}{n+1}\theta \to \theta, \ n \to \infty,$$

тобто оцінка θ^{**} є зміщеною, але асимптотично незміщеною оцінкою параметра θ.

3.2. Консистентність

Розглянемо консистентність оцінок

Означення 3

Оцінка θ_n^* параметра θ називається консистентною, якщо $\theta_n^* \xrightarrow{P} \theta$, $n \to \infty$.

Приклад 1

Дослідимо на консистентність вибіркові моменти:

- За ЗВЧ Хінчіна
$$\overline{\xi} \xrightarrow{P} E\xi_1 = a,$$
тому $\overline{\xi}$ є консистентною оцінкою параметра a;
- За ЗВЧ Хінчіна $\overline{\xi^k} \xrightarrow{P} E\xi_1^k = m_k$, тому $\overline{\xi^k}$ є консистентною оцінкою параметра m_k;

3.2. Консистентність

- Аналогічно до попередніх прикладів

$$\mathfrak{D}_{\xi}^{*} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\xi_j - a\right)^2 \xrightarrow{P} E\left(\xi_1 - a\right)^2 = \sigma^2,$$

  тому $\mathfrak{D}_{\xi}^{*}$ є консистентною оцінкою параметра σ^2;

- Якщо до представлення $s^2 : \ s^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\xi_j - \overline{\xi}\right)^2 = \overline{\xi^2} - \left(\overline{\xi}\right)^2$ застосувати ЗВЧ Хінчіна та властивості збіжності за ймовірністю, отримаємо

$$s^2 = \overline{\xi^2} - \left(\overline{\xi}\right)^2 \xrightarrow{P} E\xi_1^2 - \left(E\xi_1\right)^2 = \sigma^2,$$

  тобто s^2 є консистентною оцінкою параметра σ^2;

3.2. Консистентність

- Використовуючи попередній пункт та властивість збіжності за ймовірністю, будемо мати

$$s_0^2 = \frac{n}{n-1} s^2 \xrightarrow{P} \sigma^2,$$

тобто s_0^2 є консистентною оцінкою параметра σ^2.

Іноді, на практиці, для перевірки оцінки на консистентність зручно використовувати наступну теорему

Теорема 1

Якщо оцінка θ_n^* задовольняє умовам:

1. θ_n^* є асимптотично незміщеною,
2. $D\theta_n^* \to 0$, $n \to \infty$,

тоді θ_n^* є консистентною оцінкою параметра θ.

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Тоді, використовуючи нерівність Чебишова,

$$P\left\{\left|\theta_n^* - \theta\right| > \varepsilon\right\} \le \frac{1}{\varepsilon^2} E\left(\theta_n^* - \theta\right)^2 = \frac{1}{\varepsilon^2} E\left(\theta_n^* - E\theta_n^* + E\theta_n^* - \theta\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\left(D\theta_n^* + (E\theta_n^* - \theta)E(\theta_n^* - E\theta_n^*) + (E\theta_n^* - \theta)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} D\theta_n^* + \frac{1}{\varepsilon^2}\left(E\theta_n^* - \theta\right)^2 \to 0, n \to \infty,$$

за умов теореми. Таким чином, теорему доведено.

Нехай генеральна сукупність має рівномірний розподіл $\xi_j \sim U(0, \theta)$. Дослідимо на консистентність ОММ

$$\theta^* = 2\overline{\xi}$$

та ОМВ

$$\theta^{**} = \max\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Очевидно, за ЗВЧ,

$$\theta^* = 2\overline{\xi} = 2\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{P} 2E\xi_1 = \theta,$$

тобто θ^* є консистентною оцінкою θ.
Помітимо, що для оцінки θ^{**} ми вже не можемо використати ЗВЧ. Використаємо останню теорему для доведення консистентності оцінки θ^{**}. Оцінка θ^{**} є асимптотично незміщенною, тобто умова I теореми виконано.

3.2. Консистентність

Для перевірки умови II, знайдемо 2-й момент оцінки θ^{**}

$$E\left(\theta^{**}\right)^2 = \int_0^{\theta} \frac{nx^{n+1}}{\theta^n}dx = \frac{n}{n+2}\theta^2.$$

Звідки,

$$D\theta^{**} = E\left(\theta^{**}\right)^2 - \left(E\theta^{**}\right)^2 = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2 \to 0, \;\; n \to \infty,$$

тобто умову II теореми виконано. Це означає, що оцінка θ^{**} є консистентною оцінкою параметра θ.

3.3. Асимптотична нормальність

Означення 4

Оцінка θ_n^* називається асимптотично нормальною оцінкою параметра θ з коефіцієнтом $\sigma^2(\theta)$, якщо для довільного $\theta \in \Theta$ має місце

$$\sqrt{n}\,(\theta_n^* - \theta) \Rightarrow N\left(0, \sigma^2(\theta)\right)$$

або

$$\sqrt{n} \cdot \frac{\theta_n^* - \theta}{\sigma(\theta)} \Rightarrow N\,(0, 1)\,,\ \ n \to \infty.$$

Теорема 2

Якщо оцінка θ^* є асимптотично нормальною, тоді вона є консистентною.

3.3. Асимптотична нормальність

Дослідимо на асимптотичну нормальність вибіркові моменти:

- За ЦГТ
$$\sqrt{n}\left(\overline{\xi} - a\right) \Rightarrow N\left(0,\ D\xi_1\right),\ n \to \infty,$$
тому $\overline{\xi}$ є асимптотично нормальною оцінкою параметра a;
- За ЦГТ
$$\sqrt{n}\left(\overline{\xi^k} - m_k\right) \Rightarrow N\left(0,\ D\xi_1^k\right),\ n \to \infty,$$
тому $\overline{\xi^k}$ є асимптотично нормальною оцінкою параметра m_k;

- Аналогічно до попередніх прикладів
$$\sqrt{n}\left(\mathfrak{D}_\xi^* - \sigma^2\right) \Rightarrow N\left(0,\ D\left(\xi_1 - E\xi_1\right)^2\right),\ n \to \infty.$$
тому $\mathfrak{D}_\xi^*$ є асимптотично нормальною оцінкою параметра σ^2;
- Оцінки s^2 та s_0^2 є асимптотично нормальними оцінками σ^2, причому вони слабко збігаються до $N\left(0,\ D\left(\xi_1 - E\xi_1\right)^2\right)$.

Нехай генеральна сукупність має рівномірний розподіл $\xi_j \sim U(0, \theta)$. Дослідимо на асимптотичну нормальність ОММ

$$\theta^* = 2\overline{\xi}$$

та ОМВ

$$\theta^{**} = \max\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Очевидно, що за ЦГТ,

$$\sqrt{n}\,(\theta^* - \theta) = \sqrt{n}\left(2\overline{\xi} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sum_{j=1}^{n}(2\xi_j) - n\theta}{\sqrt{n}} \Rightarrow N\,(0,\ 4D\xi_1) = N\left(0,\ \frac{\theta^2}{3}\right),$$

тобто θ^* є асимптотично нормальною оцінкою θ.

Для дослідження θ^{**} на асимптотичну нормальність скористаємость тим, що слабка збіжність $\eta_n \Rightarrow F$ означає, що для будь-якого x - точки неперервності F

$$P\{\eta_n < x\} \to F(x),\ \ n \to \infty.$$

Візьмемо точку $x = 0$. Тоді, очевидно, $\sqrt{n}\,(\theta^{**} - \theta) < 0$ м.н. Це означає, що

$$P\{\sqrt{n}\,(\theta^{**} - \theta) < 0\} = 1 \nrightarrow \frac{1}{2}.$$

Останнє означає, що оцінка θ^{**} не є асимптотично нормальною.

Дякуємо за увагу!