Довірчі інтервали. Принцип побудови довірчих інтервалів

Лекція № 5

5.1. Довірчі інтервали
5.2. Принципи побудови довірчих інтервалів

Вступ

До цього ми шукали "точкові оцінки" невідомого параметра, тобто знаходили оцінку (для кожної реалізації це число), яка може замінити параметр.
Розглянемо інший підхід до оцінювання, при якому вказуємо інтервал до якого буде належати (накривати) параметр із заданою ймовірністю. Такий підхід називається інтервальним оцінюванням. Помітимо, що чим більше впевненості в тому, що параметр в даному інтервалі, тим він ширший. Тому немає сенсу шукати інтервал, в якому гарантовано буде покривати θ, оскільки це буде вся параметрична множина Θ.

Нехай $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ вибірка об'єму n з параметричної сім'ї розподілів $\mathcal{F}_\theta$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ та $\varepsilon \in (0, 1)$ – деяке наперед задане число.

Означення 1

Інтервал $\left(\theta_1^*, \theta_2^*\right)$ із випадковими кінцями називають довірчим інтервалом параметра θ з рівнем довіри (довірчою ймовірністю) $1 - \varepsilon$, якщо для довільного $\theta \in \Theta$

$$P\left\{\theta_1^* < \theta < \theta_2^*\right\} \geq 1 - \varepsilon.$$

Означення 2

Інтервал $\left(\theta^*_{1n},\, \theta^*_{2n}\right)$ із випадковими кінцями називають асимптотичним довірчим інтервалом параметра θ з рівнем довіри $1-\varepsilon$, якщо для довільного $\theta \in \Theta$

$$\liminf_{n\to\infty} P\left\{\theta^*_{1n} < \theta < \theta^*_{2n}\right\} \geq 1-\varepsilon.$$

Зазначимо, що в означенні 2 йде річ не про один інтервал, а про послідовность інтервалів, які залежать від об'єму вибірки n.

Означення 3

Якщо ймовірність довірчого інтервалу накрити параметр θ дорівнює (прямує до) $1 - \varepsilon$, тоді такий інтервал називається точним (асимптотично точним) довірчим інтервалом.

Означення 4

Нехай $\mathcal{F}$ є деяким розподілом, що має асолютно неперервну ф.р. F. Число τ_δ називається квантилем рівня $\delta \in (0, 1)$ розподілу F, якщо $F(\tau_\delta) = \delta$.

Зауваження 1

У випадку, коли ф.р. F є строго монотонною функцією квантиль визначається однозначно.

Загальний алгоритм побудови точних довірчих інтервалів

I. Знайти функцію $G\left(\vec{\xi},\, \theta\right)$ розподіл $\mathcal{G}$ якого не залежить від θ, причому $G\left(\vec{\xi},\, \theta\right)$ повинна мати обернену за θ функцію при кожній реалізації $\vec{\xi}$;

II. Знайти числа $\tau_1,\, \tau_2$ – квантилі розподілу $\mathcal{G}$ для яких

$$1 - \varepsilon = P\left\{\tau_1 < G\left(\vec{\xi},\, \theta\right) < \tau_2\right\};$$

III. Розв'язавши нерівність

$$\tau_1 < G\left(\vec{\xi},\, \theta\right) < \tau_2$$

відносно θ, отримаємо точний довірчий інтервал.

Зауваження 2

У якості τ_1, τ_2 частіш за все обирають квантилі розподілу $\mathcal{G}$ рівні $\frac{\varepsilon}{2}$ та $1 - \frac{\varepsilon}{2}$, відповідно. Але, в загальному випадку, квантилі слід обирати так, щоб довірчий інтервал був найменшим.

Приклад 1

Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ вибірка з рівномірного розподілу $U(0, \theta)$. Побудуємо точний довірчий інтервал для параметра θ використовуючи вказаний алгоритм.
Легко показати, що з того, що в.в. $\xi_i \sim U(0, \theta)$ випливає, що в.в. $\eta_i = \frac{\xi_i}{\theta} \sim U(0, 1)$. Тоді величина

$$\eta_{(n)} = \max\{\eta_1, \ldots, \eta_n\} = \frac{\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}}{\theta} = \frac{\xi_{(n)}}{\theta} = G\left(\vec{\xi}, \theta\right)$$

має розподіл, який не залежить від θ, з ф.р.

$$F_{\eta_n}(y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } y < 0; \\ y^n, & \text{якщо } y \in [0, 1]; \\ 1, & \text{якщо } y > 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Тоді для довільних квантилів довірчого інтервалу $0 < \tau_1 < \tau_2 \leq 1$

$$1 - \varepsilon = P\left\{\tau_1 < G\left(\vec{\xi}, \theta\right) < \tau_2\right\} = P\left\{\tau_1 < \eta_{(n)} < \tau_2\right\} = P\left\{\frac{\xi_{(n)}}{\tau_2} < \theta < \frac{\xi_{(n)}}{\tau_1}\right\} \qquad (2)$$

5.2. Принципи побудови довірчих інтервалів

Довжина інтервалу, в цьому випадку дорівнює

$$\xi_{(n)} \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_1 \tau_2}.$$

Знайдемо такі квантилі, щоб довжина довірчого інтервалу була найменшою.
З (1) та (2) випливає, що

$$1 - \varepsilon = \tau_2^n - \tau_1^n,$$

звідки

$$\tau_1 = \sqrt[n]{\tau_2^n - (1 - \varepsilon)}, \tag{3}$$

причому $\tau_2 > \sqrt[n]{1 - \varepsilon}$.

Таким чином, щоб знайти довірчий інтервал найменшої довжини, нам достатньо знайти мінімум функції

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\tau_2^n - (1-\varepsilon)}} - \frac{1}{\tau_2}, \ \tau_2 \in (\sqrt[n]{1-\varepsilon}, 1].$$

Похідну функції $d(\tau_2)$ можна представити у вигляді

$$d'(\tau_2) = \frac{\sqrt[n]{\left(\tau_2^n - (1-\varepsilon)\right)^{n+1}} - \tau_2^{n+1}}{\tau_2^2 \sqrt[n]{\left(\tau_2^n - (1-\varepsilon)\right)^{n+1}}}.$$

Покажемо, що $d'(\tau_2) < 0$ при $\tau_2 > \sqrt[n]{1-\varepsilon}$. З вигляду похідної нам достатньо довести від'ємність чисельника, що еквівалентно доведенню нерівності

$$\left(\tau_2^n - (1-\varepsilon)\right)^{\frac{n+1}{n}} < \left(\tau_2^n\right)^{\frac{n+1}{n}}.$$

Останнє випливає з монотонного зростання функції $z^{\frac{n+1}{n}}$, $z > 0$. Таким чином, ми отримали, відрізок найменшої довжини буде при $\tau_2 = 1$ і, підставляючи в (3), $\tau_1 = \sqrt[n]{\varepsilon}$. Підсумовуючи, довірчий інтервал, з рівнем довіри $1-\varepsilon$, найменшої довжини буде

$$\xi_{(n)} < \theta < \frac{\xi_{(n)}}{\sqrt[n]{\varepsilon}}.$$

Загальний алгоритм побудови асимптотично точних довірчих інтервалів

I. Знайти таку функцію $G\left(\vec{\xi}, \theta\right)$, що $G\left(\vec{\xi}, \theta\right) \Rightarrow \mathcal{G}$, причому розподіл $\mathcal{G}$ не залежить від θ і, крім того, $G\left(\vec{\xi}, \theta\right)$ повинна мати обернену за θ функцію при кожній реалізації $\vec{\xi}$;

II. Знайти числа τ_1, τ_2 – квантилі розподілу $\mathcal{G}$ для яких

$$P\left\{\tau_1 < G\left(\vec{\xi}, \theta\right) < \tau_2\right\} \to P\left\{\tau_1 < \eta < \tau_2\right\} = 1 - \varepsilon,$$

де $\eta \sim \mathcal{G}$.

III. Розв'язавши нерівність

$$\tau_1 < G\left(\vec{\xi}, \theta\right) < \tau_2$$

відносно θ, отримаємо асимптотично точний довірчий інтервал.

Приклад 2

Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ вибірка з показникового розподілу $\exp\left(0, \frac{1}{\alpha}\right)$. Побудуємо асимптотично точний довірчий інтервал для параметра α.

У якості оцінки параметра α можна взяти $\alpha^* = \overline{\xi} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$. Можна показати, що

$$E\alpha^* = \alpha, \ D\alpha^* = \frac{\alpha^2}{n},$$

а тому, використовуючи ЦГТ будемо мати

$$\frac{\alpha^* - E\alpha^*}{\sqrt{D\alpha^*}} = \sqrt{n}\frac{\alpha^* - \alpha}{\alpha} \Rightarrow N(0, 1).$$

Тобто, можемо взяти $G\left(\vec{\xi}, \alpha\right) = \overline{\xi}$ і, відповідно, довірчий інтервал буде знаходитись з нерівності

$$-\tau_{1-\frac{\varepsilon}{2}} < \sqrt{n}\frac{\alpha^* - \alpha}{\alpha} < \tau_{1-\frac{\varepsilon}{2}},$$

де $\tau_{1-\frac{\varepsilon}{2}}$ – квантиль розподілу $N(0,1)$ порядку $1-\frac{\varepsilon}{2}$. З останнього легко отримали, що асимптотично точний довірчий інтервал з рівнем довіри $1-\varepsilon$ має вигляд

$$\frac{\overline{\xi}}{1+\frac{\tau_{1-\frac{\varepsilon}{2}}}{\sqrt{n}}} < \alpha < \frac{\overline{\xi}}{1-\frac{\tau_{1-\frac{\varepsilon}{2}}}{\sqrt{n}}}.$$

Для побудови асимптотичних довірчих інтервалів можна використовувати також асимптотично нормальні оцінки.

Теорема 1

Нехай θ^* є асимптотично нормальною оцінкою параметра θ з коефіцієнтом $\sigma^2(\theta)$, причому функція $\sigma(\theta)$ є неперервною в області Θ. Тоді інтервал

$$\left(\theta^* - \frac{\tau_{1-\frac{\varepsilon}{2}} \cdot \sigma(\theta^*)}{\sqrt{n}};\ \theta^* + \frac{\tau_{1-\frac{\varepsilon}{2}} \cdot \sigma(\theta^*)}{\sqrt{n}}\right)$$

є асимптотичний довірчим інтервалом для параметра θ з рівнем довіри $1 - \varepsilon$.

Дякуємо за увагу!