# Лекція № 6

# Вступ

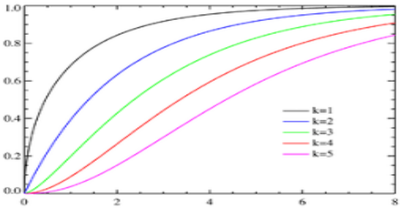
Відомі статистичні розподіли випадкових величин гама, хі-квадрат, Стьюдента і Фішера тісно пов'язані з нормальним розподілом і широко використовуються в математичній статистиці для інтерпретації емпіричних розподілів вибірок.

# Вступ

Завдяки тісному зв'язку розподілів з нормальним розподілом зазначимо такі їх теоретичні та прикладні аспекти:

- хі- квадрат розподіл використовується при аналізі таблиць спряження залежності частот випробовування від фактора ризику, побудові довірчих інтервалів, перевірці статистичних гіпотез, встановленні закону розподілу виправленої дисперсії.
- Розподіл Стьюдента застосовується при побудові довірчих інтервалів для середніх, оцінці різниці двох вибіркових середніх, перевірці гіпотез вибірки невеликого обсягу з невідомимстандартним відхиленням, у лінійному регресійному аналізі при перевірці гіпотез на значущість окремих регресійних коефіцієнтів тощо.
- Розподіл Фішера використовується при перевірці гіпотез про адекватність моделі в регресійному аналізі, рівності дисперсій двох нормальних розподілів (F-тест) та в інших задачах.

Гамма-розподіл — це двопараметрична сім'я абсолютно неперервних розподілів. Він складається з параметрів $\alpha$, $\beta$. Якщо $\alpha$ — ціле, то розподіл показує суму $\alpha$ незалежних експоненціально розподілених випадкових величин, кожна з яких набуває значення $\beta$. Якщо параметр $\alpha$ набуває цілого значення, то такий гамма-розподіл також називається розподілом Ерланга.



# 6.1. Гама розподіл

**Означення 1**

В.в. $\xi$ має гамма-розподіл $\Gamma(\alpha, \beta)$ з параметрами $\alpha, \beta > 0$, якщо її щільність розподілу має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & x > 0, \end{cases}$$

де $\Gamma(\alpha) = \int_0^T x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ – гамма-функція.

# 6.1. Гама розподіл

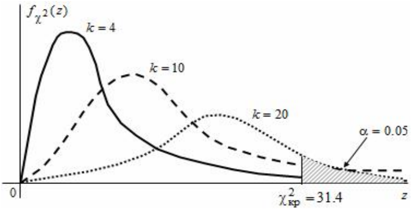
**Лема 1**

Нехай $\xi_1 \sim, \; \Gamma(\alpha_1, \beta)$ та $\xi_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta)$ - незалежні в.в. Тоді $\xi_1 + \xi_2 \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$.

**Лема 2**

Якщо $\xi \sim N(0, 1)$. Тоді $\xi^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Розподіл хі-квадрат з $n$ ступенями вільності — неперервний розподіл, що визначається як розподіл суми квадратів $n$ незалежних випадкових величин з стандартним нормальним розподілом.



# 6.2. Розподіл хі-квадрат

**Означення 2**

Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – незалежні в.в., які мають розподіл $N(0, 1)$. Тоді розподіл в.в.

$$\eta = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$$

називається розподілом хі-квадрат з $n$ ступенями волі та позначається $\chi_n^2$.

Помітимо, що з лем 1 та 2 випливає, що $\chi_n^2 \sim \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$, а тому щільність розподілу $\chi_n^2$ має наступний вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} x^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0. \end{cases}$$

# 6.2. Розподіл хі-квадрат

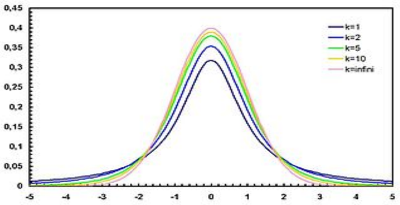
**Теорема 1**

Нехай $\eta \sim \chi^2_n$ та $\zeta \sim \chi^2_m$ незалежні в.в. Тоді

1. $\eta + \zeta \sim \chi^2_{m+n}$;
2. $E\eta = n$, $D\eta = 2n$;
3. $\dfrac{\eta}{n} \xrightarrow{P} 1$, $n \to \infty$;
4. $\dfrac{\eta - n}{\sqrt{2n}} \Rightarrow N(0, 1)$, $n \to \infty$;
5. Має місце наступна слабка збіжність
$$\sqrt{2\eta} - \sqrt{2n-1} \Rightarrow N(0, 1), \; n \to \infty,$$
а тому для достатньо великих $n$ є вірною апроксимація для ф.в. $F_{\chi^2_n}(x) = P\{\eta < x\} \approx \Phi(\sqrt{2x} - \sqrt{2n-1})$;
6. Якщо $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – незалежні в.в., що мають розподіл $N(\mu, \sigma^2)$, то $\sum_{i=1}^n \left(\frac{\xi_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_n$.

# 6.3. Розподіл Стьюдента.

Наступний розподіл був введений англійським статистиком Госсетом, який публікував свої статті під псевдонімом "Стьюдент". Він виникає у задачі оцінки сподіваного значення нормально розподіленої популяції, коли розмір вибірки малий. Цей розподіл є основою популярного t-тесту Стьюдента статистичної значущості різниці математичних сподівань двох вибірок, та довірчого інтервалу різниці очікуваних значень двох вибірок.



# 6.3. Розподіл Стьюдента.

**Означення 3**

Нехай $\xi_0,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n$ – незалежні в.в., які мають розподіл $N(0,\ 1)$. Тоді розподіл в.в.

$$t_n = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{\xi_1^2+\ldots+\xi_n}{n}}}$$

називається розподілом Стьюдента з $n$ ступенями волі і позначається $St_n$.

Помітимо, що розподіл Стьдента співпадає з розподілом в.в.

$$t_n = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{\eta}{n}}},$$

де $\xi \sim N(0,\ 1)$, $\eta \sim \chi_n^2$ – незалежні в.в.

# 6.3. Розподіл Стьюдента.

Щільність розподілу Стьюдента з $n$ ступенями волі має наступний вигляд

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{y^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}. \qquad (1)$$

Зазначимо, що розподіл Стьюдента з 1 ступенем волі є розподілом Коші.Дійсно, підставивши $n = 1$ в (1), будемо мати

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \left(1 + y^2\right)^{-1}.$$

# 6.3. Розподіл Стьюдента.

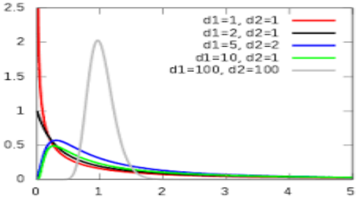
**Теорема 2**

Нехай $t_n \sim St_n$. Тоді

1. симетрія $-t_n \sim St_n$;
2. $t_n \Rightarrow N(0,1)$, $n \to \infty$;
3. Якщо $0 < m < n$, то $E|t_n|^m < \infty$, при цьому для $m = 2k+1$ $Et_n^m = 0$. Для $m \geq n$ $Et_n^m$ не існують.

# 6.4. Розподіл Фішера.

Розподіл Фішера або F-розподіл — це двопараметричне сімейство абсолютно неперервних розподілів. F-розподіл часто зустрічається як розподіл тестової статистики, коли нульова гіпотеза вірна, особливо в тесті відношення правдоподібності. Він є найважливішим при аналізі дисперсії



**Означення 4**

Нехай $\xi \sim \chi^2_n$, $\eta \sim \chi^2_m$ – незалежні в.в. Тоді розподіл в.в.

$$\zeta = \frac{\xi / n}{\eta / m}$$

називається розподілом Фішера з $n$ та $m$ ступенями волі і позначається $F_{n,m}$.

# 6.4. Розподіл Фішера.

**Теорема 3**

Нехай $\zeta \sim F_{n,m}$. Тоді

1. $\dfrac{1}{\zeta} \sim F_{m,n}$;
2. $\zeta$ слабко збігається до виродженого в точці 1 розподілу при будь-яких прямуваннях $n$ та $m$ до нескінченності;
3. Якщо $t_m \sim St_m$, то $t_m^2 \sim F_{1,m}$

Дякуємо за увагу!