# Перетворення нормальних вибірок

## Лекція № 7

Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ вибірка об'єму $n$ з розподілу $N(0, 1)$, а $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^T$ відповідний вектор-стовпець. Нехай $C = \left(c_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ – ортогональна матриця порядку $n$, тобто

$$C \cdot C^T = E,$$

де $E$ - одинична матриця порядку $n$ та $\vec{\zeta} = C\vec{\xi}$.

Координати вектора $\vec{\zeta}$ мають гауссівський розподіл, оскільки вони є лінійними комбінаціями незалежних гауссівських випадкових величин. Але який саме розподіл вони будуть мати? Для відповіді на це питання, з'ясуємо питання розподілу випадкового вектора після множення його на довільну невироджену матрицю.

Наведемо теорему про щільність розподілу від лінійного перетворення випадкового вектора

## Теорема 1

Нехай випадковий вектор $\vec{\xi}$ має щільність розподілу

$$f_{\vec{\xi}}(\vec{y}) = f_{\vec{\xi}}(y_1, \ldots, y_n),$$

$A$ – невироджена матриця, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, – деякий фіксований вектор. Тоді вектор $\vec{\zeta} = A\vec{\xi} + \vec{b}$ має щільність розподілу

$$f_{\vec{\zeta}}(\vec{y}) = f_{A\vec{\xi}+\vec{b}}(\vec{y}) = |\det A|^{-1} \cdot f_{\vec{\xi}}\left(A^{-1}(\vec{y} - \vec{b})\right).$$

Доведення. Нехай $B \subset \mathbb{R}^n$ – довільна борелівська множина. Обчислимо

$$P\left(\vec{\zeta} \in B\right) = P\left(A\vec{\xi} + \vec{b} \in B\right) = P\left(\vec{\xi} \in A^{-1}(B - \vec{b})\right) = \int\limits_{A^{-1}(B-\vec{b})} f_{\vec{\xi}}(\vec{x})d\vec{x},$$

де $A^{-1}(B - \vec{b}) = \left\{\vec{x} = A^{-1}(\vec{y} - \vec{b}) \,|\, \vec{y} \in B\right\}$.

Виконаємо заміну змінних $\vec{y} = A\vec{x} + \vec{b}$. За такої заміни область $A^{-1}(B-\vec{b})$ перейде в область $B$. Оскільки обернена заміна має вигляд $\vec{x} = A^{-1}(\vec{y} - \vec{b})$, то якобіан перетворення буде дорівнювати $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$, а тому диференціал запишеться як $d\vec{x} = |\det A|^{-1}\, d\vec{y}$. Отже,

$$P\left(\vec{\zeta} \in B\right) = \int\limits_{B} |\det A|^{-1} \cdot f_{\vec{\xi}}\left(A^{-1}(\vec{y} - \vec{b})\right) d\vec{y}.$$

В силу довільності вибору множини $B$, отримуємо результат теореми.

Тепер ми можемо сформулювати теорему щодо точного розподілу гауссівського випадкового вектора $\vec{\zeta} = C\vec{\xi}$.

### Теорема 2

Нехай $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^T$, де $\xi_j$, $j = \overline{1, n}$, – незалежні $N(0,\ 1)$ розподілені випадкові величини, $C$ – ортогональна матриця. Тоді координати $\vec{\zeta} = C\vec{\xi}$ є також незалежними $N(0,\ 1)$ розподіленими випадковими величинами.

Доведення. В силу незалежності координат вектора $\vec{\xi}$, його щільність розподілу є добутком щільностей координат

$$f_{\vec{\xi}}(\vec{y}) = \prod_{i=1}^{n} f_{\xi_i}(y_i) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(y_1^2+\ldots+y_n^2\right)} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\|\vec{y}\|^2},$$

де $\|\vec{y}\|^2 = \vec{y}^{\,T} \cdot \vec{y} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2$.

Обчислимо щільність розподілу вектора $\vec{\zeta} = C\vec{\xi}$. Оскільки матриця $C$ є ортогональною, то $C^{-1} = C^T$ та $\det C = 1$. Звідки будемо мати, що

$$f_{\vec{\zeta}}(\vec{y}) = f_{\vec{\xi}}\left(C^T \vec{y}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\left\|C^T \cdot \vec{y}\right\|^2}.$$

Помітимо, що

$$\left\|C^T \cdot \vec{y}\right\|^2 = \left(C^T \vec{y}\right)^T \cdot \left(C^T \vec{y}\right) = \left(\vec{y}^{\,T} C\right) \cdot \left(C^T \vec{y}\right) = \vec{y}^{\,T} \cdot \left(C C^{-1}\right) \cdot \vec{y} = \left\|\vec{y}\right\|^2.$$

Враховуючи попередню рівність, щільність прийме вигляд

$$f_{\vec{\zeta}}(\vec{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\|\vec{y}\|^2} = e^{-\frac{1}{2}\left(y_1^2+\ldots+y_n^2\right)},$$

а тому координати випадкового вектора $\vec{\zeta}$ є незалежними $N(0,\,1)$ розподіленими випадковими величинами, що й треба було довести.

Наступне твердження має допоміжний характер і за традицією називається лемою. Вона є найбільш важливим допоміжним твердженням в усіх розділах теоретичної статистики, які пов'язані з гауссівським розподілом

### Лема 1 (лема Фішера)

Нехай $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^T$, де $\xi_j$, $j = \overline{1, n}$, – незалежні $N(0, 1)$ розподілені випадкові величини, $C$ – ортогональна матриця, $\vec{\zeta} = C\vec{\xi}$. Тоді для довільного $k = \overline{1, n-1}$ випадкова величина

$$\eta_k = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 - \zeta_1^2 - \ldots - \zeta_k^2$$

не залежить від $\zeta_1^2, \ldots, \zeta_k^2$ та має розподіл $\chi^2_{n-k}$.

Доведення. Оскільки

$$\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2 = \left\|\vec{\xi}\right\|^2 = \left\|C\vec{\xi}\right\|^2 = \left\|\vec{\zeta}\right\|^2 = \zeta_1^2 + \ldots + \zeta_n^2,$$

то

$$\eta_k = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i^2 - \zeta_1^2 - \ldots - \zeta_k^2 = \zeta_{k+1}{}^2 + \ldots + \zeta_n{}^2.$$

Результат леми випливає з отриманої рівності і того, що, згідно з Теоремою 2, $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ є незалежними $N(0, 1)$ розподіленими випадковими величинами.

## Теорема 3 (Основний наслідок з леми Фішера)

Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ незалежні випадкові величини з розподілу $N\left(\mu, \sigma^2\right)$. Тоді

1. $\sqrt{n}\dfrac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$;
2. $\dfrac{(n-1)s_0^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\dfrac{\xi_i - \bar{\xi}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_{n-1}$;
3. в.в. $\bar{\xi}$ та $s_0^2$ є незалежними.

Доведення. Перше твердження теореми є очевидним. Помітимо, що

$$\frac{(n-1)s_0^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\xi_i - \overline{\xi}}{\sigma} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\xi_i - \mu}{\sigma} - \frac{\overline{\xi} - \mu}{\sigma} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\nu_i - \overline{\nu})^2 ,$$

де $\nu_i = \dfrac{\xi_i - \mu}{\sigma} \sim N(0,\ 1)$, $\overline{\nu} = \dfrac{\overline{\xi} - \mu}{\sigma} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \nu_i$. Останнє означає, що для доведення тверджень 2) та 3) теореми достатньо довести їх для випадку $\xi_i \sim N\,(0,\ 1)$, $i = \overline{1, n}$.

Розглянемо вектор $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^T$. Оскільки він є одиничним вектором, то його можна доповнити до ортономованого базису в просторі $\mathbb{R}^n$. Останнє означає, що можна побудувати ортогональну матрицю $C$, першим рядком якої буде $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, а іншими рядками координати інших векторів відповідного ортонормованого базису.

Нехай $\vec{\zeta} = C\vec{\xi}$, тоді

$$\zeta_1 = \sqrt{n} \cdot \overline{\xi} = \frac{\xi_1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{\xi_n}{\sqrt{n}}.$$

Представимо величину $(n-1)s_0^2$ у вигляді:

$$\eta_1 = (n-1)s_0^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\xi_i - \overline{\xi}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i)^2 - n\overline{\xi}^2 = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i)^2 - {\zeta_1}^2.$$

Тоді, з леми Фішера випливає, що

$$(n-1)s_0^2 = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i)^2 - {\zeta_1}^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

і не залежить від

$$\sqrt{n} \cdot \overline{\xi},$$

тобто $\overline{\xi}$ та $s_0^2$ є незалежними. Твердження (2) і (3) теореми доведено.

Помітимо, що не дивлячись на те, що випадкова величина

$$\frac{(n-1){s_0}^2}{\sigma^2}$$

є сумою $n$ квадратів випадкових величин, які між собою є залежними (через наявність у кожному $\overline{\xi}$), вона має розподіл $\chi^2_{n-1}$. Причому всі доданки є гауссівськими однаково розподіленими випадковими величинами, але не $N(0, 1)$.

Незалежність величин $\overline{\xi}$ та $s_0^2$ є властивістю характерною лише для гауссівського розподілу. Так само як і властивість зберігати незалежність координат після множення на ортогональну матрицю. Наступний наслідок з леми Фішера дозволить будувати довірчі інтервали для параметрів нормального розподілу.

## Теорема 4

Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ незалежні в.в. з розподілу $N\left(\mu, \sigma^2\right)$. Тоді

1. $\sqrt{n}\dfrac{\overline{\xi}-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$;
2. $\dfrac{n\mathfrak{D}^*_\xi}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\dfrac{\xi_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_n$;
3. $\sqrt{n}\dfrac{\overline{\xi}-\mu}{s_0} \sim St_{n-1}$.
4. $\dfrac{(n-1)s_0^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\dfrac{\xi_i-\overline{\xi}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_{n-1}$;

Доведення. Твердження (1) та (2) є очевидним, а (4) випливає з Теореми 3.
Для доведення (3) перепишемо відповідну випадкову величину у вигляді

$$\sqrt{n} \cdot \frac{\bar{\xi} - \mu}{s_0} = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{(n-1){s_0}^2}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{n-1}}} = \frac{\xi_0}{\frac{\sqrt{{\chi_{n-1}}^2}}{n-1}},$$

де величини

$$\xi_0 = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

та

$$\chi^2_{n-1} = \frac{(n-1){s_0}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$$

є незалежними в силу Теореми 3. З останнього випливає твердження (3).

Дякуємо за увагу!