# Точні довірчі інтервали для параметрів нормального розподілу

## Лекція № 8

8.1. Довірчий інтервал для середнього $\mu$ при відомій дисперсії $\sigma^2$.
8.2. Довірчий інтервал для середнього $\mu$ при невідомій дисперсії $\sigma^2$.
8.3. Довірчий інтервал для дисперсії $\sigma^2$ при невідомому середньому $\mu$.

Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ вибірка об'єму $n$ з розподілу $N\left(\mu, \sigma^2\right)$. Побудуємо точні довірчі інтервали з рівнем довіри $1 - \varepsilon$ для параметрів $\mu$ та $\sigma^2$ даного гауссівського розподілу.

# Довірчий інтервал для середнього $\mu$ при відомій дисперсії $\sigma^2$.

Побудуємо довірчий інтервал для середнього $\mu$ при відомій дисперсії $\sigma^2$.

З властивостей гауссівського розподілу випливає, що з гауссовості елементів вибірки слідує, що вибіркове середнє $\overline{\xi}$ буде також гауссівською випадковою величиною. Оскільки

$$E(\overline{\xi}) = \mu, \quad D\overline{\xi} = \frac{\sigma^2}{n},$$

то

$$\overline{\xi} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Будемо вимагати виконання співвідношення

$$P\left\{|\overline{\xi} - \mu| < \delta\right\} = 1 - \varepsilon. \tag{1}$$

# Довірчий інтервал для середнього $\mu$ при відомій дисперсії $\sigma^2$.

Для гауссівської випадкової величини $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ є вірною формула

$$P\{|\xi - \mu| < \delta\} = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - 1,$$

де

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Застосувавши її до $\bar{\xi} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ будемо мати, враховуючи (1),

$$P\left\{|\bar{\xi} - \mu| < \delta\right\} = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1 = 1 - \varepsilon = 2\Phi\left(t_{1-\frac{\varepsilon}{2}}\right) - 1, \tag{2}$$

де $t_{1-\frac{\varepsilon}{2}}$ – квантиль розподілу $N(0, 1)$ рівня $1 - \frac{\varepsilon}{2}$.

# Довірчий інтервал для середнього $\mu$ при відомій дисперсії $\sigma^2$.

З (2) знаходимо, що

$$\delta = t_{1-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Таким чином, (2) прийме вигляд

$$P\left\{|\bar{\xi} - \mu| < t_{1-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \varepsilon$$

або

$$P\left\{\bar{\xi} - t_{1-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{\xi} + t_{1-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \varepsilon.$$

# Довірчий інтервал для середнього $\mu$ при відомій дисперсії $\sigma^2$.

Отже, довірчий інтервал для середнього $\mu$ гауссівської генеральної сукупності при відомій дисперсії $\sigma^2$ буде мати вигляд

$$\bar{\xi} - t_{1-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{\xi} + t_{1-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{3}$$

де $t_{1-\frac{\varepsilon}{2}}$ – квантиль розподілу $N(0, 1)$ рівня $1 - \frac{\varepsilon}{2}$.

**Зауваження 1**

Зазначимо, що на практиці у довірчий інтервал замість випадкових величин слід підставляти їх реалізації.

# Довірчий інтервал для середнього $\mu$ при відомій дисперсії $\sigma^2$.

## Приклад 1

Нехай було виконано 5 незалежних випробувань із гауссівської генеральної сукупності $N(\mu, 20)$:

$$x_1 = -25,\ x_2 = 34,\ x_3 = -20,\ x_4 = 10,\ x_5 = 21.$$

Побудувати довірчий інтервал для $\mu$ з рівнем довіри $0,95$.
Розв'язок. Знаходимо спочатку $\overline{x}$:

$$\overline{x} = \frac{1}{5}(-25 + 30 - 20 + 10 + 21) = 4.$$

За умовою $1 - \varepsilon = 0,95$. За таблицею для функції розподілу $N(0,1)$ $t_{0,975} = 1,96$. Підставляючи знайдені значення в (3) отримаємо довірчий інтервал

$$(-13,5; 21,5).$$

# Довірчий інтервал для дисперсії $\sigma^2$ при відомому середньому $\mu$.

Розглянемо тепер побудову довірчих інтервалів для дисперсії $\sigma^2$ гауссівської генеральної сукупності при відомому середньому $\mu$.

З властивостей гауссівських випадкових величин випливає, що

$$\frac{n\mathfrak{D}^*_\xi}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\xi_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2_n.$$

Щільність розподілу $\chi^2_n$ має вигляд

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} x^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0, \end{cases}$$

тобто залежить від об'єму вибірки $n$ і не залежить від параметрів $\mu$ та $\sigma^2$, а тому підійде для побудови довірчого інтервалу.

# Довірчий інтервал для дисперсії $\sigma^2$ при відомому середньому $\mu$.

Враховуючи те, що $\chi_n^2$ не є симетричною випадковою величиною, ймовірність запишемо у вигляді

$$P\left\{t_{n,\,\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{n\mathfrak{D}_\xi^*}{\sigma^2} < t_{n,\,1-\frac{\varepsilon}{2}}\right\} = F_\chi\left(t_{n,\,1-\frac{\varepsilon}{2}}\right) - F_\chi\left(t_{n,\,\frac{\varepsilon}{2}}\right) = 1-\varepsilon,$$

де

$$F_\chi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_n(t)dt$$

є функцією розподілу $\chi_n^2$, а $t_{n,\,\frac{\varepsilon}{2}}$ і $t_{n,\,1-\frac{\varepsilon}{2}}$ – квантилі розподілу $\chi_n^2$ рівнів $\frac{\varepsilon}{2}$ і $1-\frac{\varepsilon}{2}$, відповідно, або

$$P\left\{\frac{n\mathfrak{D}_\xi^*}{t_{n,\,1-\frac{\varepsilon}{2}}} < \sigma^2 < \frac{n\mathfrak{D}_\xi^*}{t_{n,\,\frac{\varepsilon}{2}}}\right\} = 1-\varepsilon.$$

# Довірчий інтервал для дисперсії $\sigma^2$ при відомому середньому $\mu$.

Отже довірчий інтервал для дисперсії $\sigma^2$ при відомому середньому $\mu$ для гауссівської генеральної сукупності має вигляд

$$\frac{n\mathfrak{D}^*_\xi}{t_{n,\,1-\frac{\varepsilon}{2}}} < \sigma^2 < \frac{n\mathfrak{D}^*_\xi}{t_{n,\,\frac{\varepsilon}{2}}}$$

де $t_{n,\,\frac{\varepsilon}{2}}$ і $t_{n,\,1-\frac{\varepsilon}{2}}$ – квантилі розподілу $\chi^2_n$ рівнів $\frac{\varepsilon}{2}$ і $1-\frac{\varepsilon}{2}$, відповідно.

# Довірчий інтервал для середнього $\mu$ при невідомій дисперсії $\sigma^2$.

Знайдемо довірчий інтервал для середнього $\mu$, але для випадку, коли дисперсія $\sigma^2$ є невідомою.

Розглянемо випадкову величину

$$T = \sqrt{n}\frac{\overline{\xi} - \mu}{s_0},$$

де $s_0^2$ – незміщена вибіркова дисперсія, яка обчислюється за формулою:

$$s_0 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i - \overline{\xi}\right)^2.$$

# Довірчий інтервал для середнього $\mu$ при невідомій дисперсії $\sigma^2$.

За наслідком із леми Фішера, випадкові величини $\bar{\xi}$ та $s_0^2$ є незалежними та

$$\xi = \sqrt{n}\frac{\bar{\xi} - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1),$$
$$\eta = \frac{(n-1)s_0^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

Оскільки $T$ можна представити у вигляді

$$T = \frac{\sqrt{n}\frac{\bar{\xi}-\mu}{\sigma}}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\frac{(n-1)s_0^2}{\sigma^2}}} = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{\eta}{n}}},$$

то випадкова величина $T \sim \mathrm{St}_{n-1}$, тобто має розподіл Стьюдента з $n-1$ степенями волі.

# Довірчий інтервал для середнього $\mu$ при невідомій дисперсії $\sigma^2$.

Помітимо, що щільність розподілу $\mathrm{St}_{n-1}$ має вигляд:

$$f_n(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}},$$

де

$$\Gamma(\lambda) = \int\limits_0^\infty u^{\lambda-1} \cdot e^{-u} du$$

є гамма-функцією, залежить лише від об'єму вибірки $n$ та не залежить від невідомих параметрів $\mu$ та $\sigma^2$. Це означає, що ми можемо використати випадкову величину $T$ для побудови довірчого інтервалу.

# Довірчий інтервал для середнього $\mu$ при невідомій дисперсії $\sigma^2$.

Враховуючи те, що $\mathrm{St}_{n-1}$ є симетричною випадковою величиною, можемо записати ймовірність

$$P\left\{|T| < t_{n-1,\,1-\frac{\varepsilon}{2}}\right\} = P\left\{\left|\sqrt{n}\,\frac{\overline{\xi}-\mu}{s_0}\right| < t_{n-1,\,1-\frac{\varepsilon}{2}}\right\} = 2F_{\mathrm{St}}\left(t_{n-1,\,1-\frac{\varepsilon}{2}}\right) - 1 = 1-\varepsilon,$$

де

$$F_{\mathrm{St}}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_n(t)dt$$

є функцією розподілу $\mathrm{St}_{n-1}$, а $t_{n-1,\,1-\frac{\varepsilon}{2}}$ – квантиль розподілу $\mathrm{St}_{n-1}$ рівня $1-\frac{\varepsilon}{2}$, або

$$P\left\{\overline{\xi} - t_{n-1,\,1-\frac{\varepsilon}{2}}\frac{s_0}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{\xi} + t_{n-1,\,1-\frac{\varepsilon}{2}}\frac{s_0}{\sqrt{n}}\right\} = 1-\varepsilon.$$

# Довірчий інтервал для середнього $\mu$ при невідомій дисперсії $\sigma^2$.

Отже довірчий інтервал для середнього $\mu$ при невідомій дисперсії $\sigma^2$ для гауссівської генеральної сукупності має вигляд

$$\overline{\xi} - t_{n-1,\,1-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{s_0}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{\xi} + t_{n-1,\,1-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{s_0}{\sqrt{n}} \qquad (4)$$

де $t_{n-1,\,1-\frac{\varepsilon}{2}}$ – квантиль розподілу $\mathrm{St}_{n-1}$ рівня $1-\frac{\varepsilon}{2}$.

# Довірчий інтервал для середнього $\mu$ при невідомій дисперсії $\sigma^2$.

## Приклад 2

Нехай було виконано 5 незалежних випробувань із гауссівської генеральної сукупності $N(\mu, \sigma)$:

$$x_1 = -25, \;\; x_2 = 34, \;\; x_3 = -20, \;\; x_4 = 10, \;\; x_5 = 21.$$

Побудувати довірчий інтервал для $\mu$ з рівнем довіри $0,95$.
Розв'язок. З прикладу 1 маємо, що $\overline{x} = 4$. Крім того,

$$s_0^2 = \frac{1}{4}\left((-25-4)^2 + \ldots + (21-4)^2\right) = 660,5$$

За умовою $1 - \varepsilon = 0,95$. За таблицею знаходимо $t_{4,\,0{,}975} = 2,78$. Підставляючи знайдені значення в (4) отримаємо довірчий інтервал

$$(-27,9; 35,9).$$

# Довірчий інтервал для дисперсії $\sigma^2$ при невідомому середньому $\mu$.

Розглянемо тепер випадок побудови довірчого інтервалу для дисперсії $\sigma^2$, коли середнє є невідомим.

З наслідку із леми Фішера

$$\frac{(n-1)s_0^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1},$$

а тому, повторюючи міркування знаходження довірчого інтервалу при відомому математичному сподіванню, отримаємо, що

$$\frac{(n-1)s_0^2}{t_{n-1,\,1-\frac{\varepsilon}{2}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s_0^2}{t_{n-1,\,\frac{\varepsilon}{2}}}.$$

де $t_{n-1,\,\frac{\varepsilon}{2}}$ і $t_{n-1,\,1-\frac{\varepsilon}{2}}$ – квантилі розподілу $\chi^2_{n-1}$ рівнів $\frac{\varepsilon}{2}$ і $1-\frac{\varepsilon}{2}$, відповідно.

Дякуємо за увагу!