Перевірка гіпотез щодо гаусівської генеральної сукупності

Лекція № 12

12.1. Перевірка гіпотез про середнє нормального розподілу
з відомою дисперсією.
12.2. Перевірка гіпотез про середнє нормального розподілу
з невідомою дисперсією.
12.3. Перевірка гіпотез про дисперсію нормального розподілу
з відомим середнім.
12.4. Перевірка гіпотез про дисперсію нормального розподілу
з невідомим середнім.

12.1. Перевірка гіпотез про середнє нормального розподілу з відомою дисперсією.

Нехай $\xi_1, ..., \xi_n$ вибірка з нормального розподілу $N(\mu, \sigma^2)$ з відомою дисперсією σ^2. Перевіряється проста гіпотеза:

$$H_0 : \mu = \mu_0.$$

У якості альтернативної гіпотези можна обрати один з наступних варіантів:

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \text{ двосторонній критерій;}$$

$$H_1 : \mu > \mu_0 \text{ правосторонній критерій;}$$

$$H_1 : \mu < \mu_0 \text{ лівосторонній критерій.}$$

Необхідно за реалізацією $x_1, x_2, ..., x_n$ вибірки $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ розподілу $N(\mu, \sigma^2)$ зробити висновок: відхиляти гіпотезу H_0 чи ні.

12.1. Перевірка гіпотез про середнє нормального розподілу з відомою дисперсією.

Оберемо рівень значущості α. У якості статистики критерію оберемо:

$$Z = \sqrt{n}\frac{\overline{\xi} - \mu_0}{\sigma},$$

У разі вірності гіпотези гіпотези H_0

$$\overline{\xi} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right),$$

а тому $Z \sim N(0,1)$.

Будемо позначати через t_γ – квантиль розподілу $N(0,1)$ рівня γ.

12.1. Перевірка гіпотез про середнє нормального розподілу з відомою дисперсією.

У випадку двостороннього критерію, якщо значення статистики потрапляє у критичну область

$$|Z^*| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}},$$

то відхиляємо гіпотезу H_0. Якщо ж значення статистики потрапляє у область $|Z^*| < t_{1-\frac{\alpha}{2}}$, то не має достатніх підстав у відхиленні гіпотези H_0.

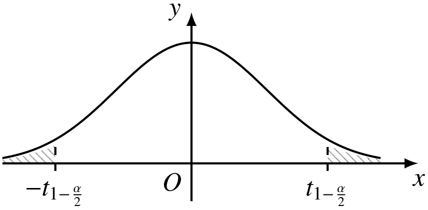

Рис. Критична область двосторонього критерію

12.1. Перевірка гіпотез про середнє нормального розподілу з відомою дисперсією.

У випадку правостороннього критерію, якщо значення статистики потрапляє у критичну область

$$Z^* \geq t_{1-\alpha},$$

то відхиляємо гіпотезу H_0. Якщо значення статистики потрапляє у область $Z^* < t_{1-\alpha}$, то не має достатніх підстав у відхиленні гіпотези H_0.

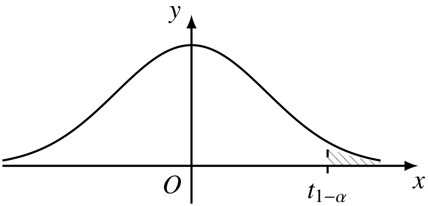

Рис. Критична область правостороннього критерію

12.1. Перевірка гіпотез про середнє нормального розподілу з відомою дисперсією.

У випадку лівостороннього критерію, якщо значення статистики потрапляє у критичну область

$$Z^* \leq -t_{1-\alpha},$$

то відхиляємо гіпотезу H_0. Якщо значення статистики потрапляє в область $Z^* > -t_{1-\alpha}$, то не має достатніх підстав у відхиленні гіпотези H_0.

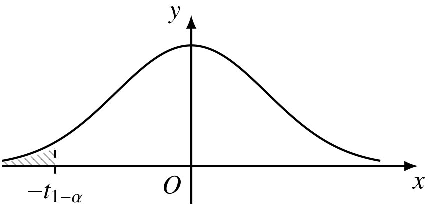

Рис. Критична область лівосторонього критерію

12.2. Перевірка гіпотез про середнє нормального розподілу з невідомою дисперсією.

Нехай $\xi_1, ..., \xi_n$ вибірка з нормального розподілу $N(\mu, \sigma^2)$ з невідомою дисперсією. Перевіряється проста гіпотеза:

$$H_0 : \mu = \mu_0.$$

У якості альтернативної гіпотези можна обрати один із варіантів попереднього випадку.

12.2. Перевірка гіпотез про середнє нормального розподілу з невідомою дисперсією.

У якості статистики критерію оберемо

$$Z = \sqrt{n}\frac{\bar{\xi} - \mu_0}{s_0},$$

де

$$s_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi - \bar{\xi})^2,$$

яка, за вірності гіпотези H_0 буде мати розподіл Стьюдента St_{n-1} (Випливає із наслідків леми Фішера).

Будемо позначати через $t_{n-1,\gamma}$ – квантиль розподілу St_{n-1} рівня γ.

12.2. Перевірка гіпотез про середнє нормального розподілу з невідомою дисперсією.

У випадку двостороннього критерію, якщо значення статистики потрапляє у критичну область

$$|Z^*| \geq t_{n-1,\,1-\frac{\alpha}{2}},$$

то відхиляємо гіпотезу H_0. Якщо значення статистики потрапляє в область $|Z^*| < t_{n-1,\,1-\frac{\alpha}{2}}$, то не має достатніх підстав у відхиленні гіпотези H_0.

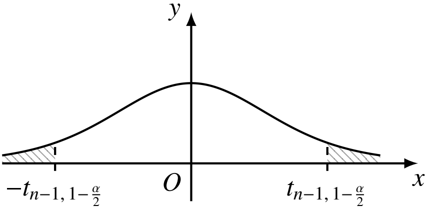

Рис. Критична область двосторонього критерію

12.2. Перевірка гіпотез про середнє нормального розподілу з невідомою дисперсією.

У випадку правостороннього критерію, якщо значення статистики потрапляє у критичну область

$$Z^* > t_{n-1,\,1-\alpha},$$

то відхиляємо гіпотезу H_0. Якщо значення статистики потрапляє в область $Z^* \leq t_{n-1,\,1-\alpha}$, то не має достатніх підстав у відхиленні гіпотези H_0.

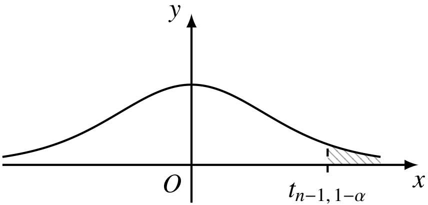

Рис. Критична область правосторонього критерію

12.2. Перевірка гіпотез про середнє нормального розподілу з невідомою дисперсією.

У випадку лівостороннього критерію, якщо значення статистики потрапляє у критичну область

$$Z^* \le -t_{n-1,\,1-\alpha},$$

то відхиляємо гіпотезу H_0. Якщо значення статистики потрапляє в область $Z^* > -t_{n-1,\,1-\alpha}$, то не має достатніх підстав у відхиленні гіпотези H_0.

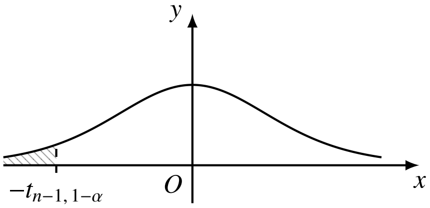

Рис. Критична область лівосторонього критерію

12.3. Перевірка гіпотез про дисперсією нормального розподілу з відомим середнім.

Нехай $\xi_1, ..., \xi_n$ вибірка з нормального розподілу $N(\mu, \sigma^2)$. Параметри μ будемо вважати відомим. Відносно значення параметра σ^2 висувається гіпотеза

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2.$$

У якості альтернативної гіпотези можна обрати один з наступних варіантів:

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \text{ двосторонній критерій;}$$

$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \text{ правосторонній критерій;}$$

$$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \text{ лівосторонній критерій.}$$

Необхідно за реалізацією x_1, x_2, ..., x_n вибірки ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n розподілу $N(\mu, \sigma^2)$ зробити висновок: відхиляти гіпотезу H_0 чи ні.

12.3. Перевірка гіпотез про дисперсією нормального розподілу з відомим середнім.

Оберемо рівень значущості α. У якості статистики критерію оберемо:

$$Z = \frac{n\mathfrak{D}^*_\xi}{\sigma_0^2},$$

де

$$\mathfrak{D}^*_\xi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \mu)^2 .$$

У разі вірності гіпотези гіпотези H_0

$$Z = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\xi_i - \mu}{\sigma_0}\right)^2 = \left(\frac{\xi_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_n.$$

Будемо позначати через $\chi^2_{n,\gamma}$ – квантиль розподілу χ^2_n рівня γ.

12.3. Перевірка гіпотез про дисперсією нормального розподілу з відомим середнім.

У випадку двостороннього критерію, якщо значення статистики потрапляє у критичну область

$$Z^* \leq \chi^2_{n,\,\frac{\alpha}{2}} \;\vee\; Z^* \geq \chi^2_{n,\,1-\frac{\alpha}{2}},$$

то відхиляємо гіпотезу H_0. Якщо значення статистики потрапляє в область $\chi^2_{n,\,\frac{\alpha}{2}} < Z^* < \chi^2_{n,\,1-\frac{\alpha}{2}}$, то не має достатніх підстав у відхиленні гіпотези H_0.

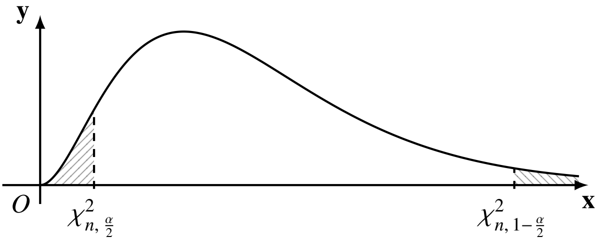

Рис. Критична область двосторонього критерію

12.3. Перевірка гіпотез про дисперсією нормального розподілу з відомим середнім.

У випадку правостороннього критерію, якщо значення статистики потрапляє у критичну область

$$Z^* \geq \chi^2_{n,\,1-\alpha},$$

то відхиляємо гіпотезу H_0. Якщо значення статистики потрапляє в область $Z^* < \chi^2_{n,\,1-\alpha}$, то не має достатніх підстав у відхиленні гіпотези H_0.

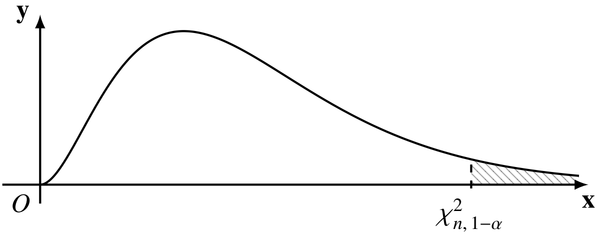

Рис. Критична область правосторонього критерію

12.3. Перевірка гіпотез про дисперсією нормального розподілу з відомим середнім.

У випадку лівостороннього критерію, якщо значення статистики потрапляє у критичну область

$$Z^* \le \chi^2_{n,\alpha},$$

то відхиляємо гіпотезу H_0. Якщо значення статистики потрапляє в область $Z^* > \chi^2_{n,\alpha}$, то не має достатніх підстав у відхиленні гіпотези H_0.

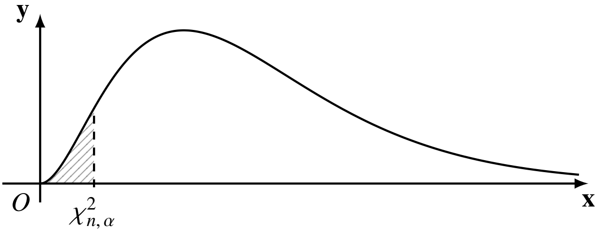

Рис. Критична область лівосторонього критерію

12.4. Перевірка гіпотез про дисперсією нормального розподілу з невідомим середнім.

Нехай $\xi_1, ..., \xi_n$ вибірка з нормального розподілу $N(\mu, \sigma^2)$. Параметри a і σ^2 невідомі. Відносно значення параметра σ^2 висувається гіпотеза

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2.$$

У якості альтернативної гіпотези можна обрати один із варіантів попереднього випадку.

Оберемо рівень значущості α. Статистику критерію оберемо наступну:

$$Z = \frac{(n-1)s_0^2}{\sigma_0^2}.$$

У разі вірності гіпотези гіпотези H_0, застосовуючи наслідки з леми Фішера

$$Z = \frac{(n-1)s_0^2}{\sigma_0^2} = \frac{(n-1)s_0^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

12.4. Перевірка гіпотез про дисперсією нормального розподілу з невідомим середнім.

Подальші міркування повторюють побудову критерію для випадку гіпотези щодо дисперсії гауссівської генеральної сукупності при відомому математичному сподіванню, а тому наведемо тільки критичні області для кожної з трьох альтернатив:

- критична область двостороннього критерію

$$Z^* \le \chi^2_{n-1,\,\frac{\alpha}{2}} \ \vee\ Z^* \ge \chi^2_{n,\,1-\frac{\alpha}{2}};$$

- критична область правостороннього критерію

$$Z^* \ge \chi^2_{n-1,\,1-\alpha};$$

- критична область лівостороннього критерію

$$Z^* \le \chi^2_{n-1,\,\alpha}.$$

Дякуємо за увагу!