Хоёр болон түүнээс олон Пуасоны тархалтын нийлбэр

Бидний сургуулийн ойролцоох гарцууд аюулгүй юу?

Сургуулийн гаднах замаар явах машины тоо өссөнөөс болж сурагчид зам гарахад аюултай болж эхэлж байгааг замын хөдөлгөөний сүүлийн үеийн судалгаагаар тогтоосон.

Хэсэг сурагчдаас авсан судалгаанаас харахад замын хөдөлгөөн маш ихсэж байгаагаас сурагчид зам гарах үед маш эрсдэлтэй болсныг давхар харуулжээ.

Өдрийн нам гүм үе буюу 3 цагт сургуулийн хажуугаар хот руу ирэх тээврийн хэрэгслийн дундаж тоо нь минут тутамд 3.5, хотоос гарч байгаа тээврийн хэрэгслийн дундаж тоо минут тутамд 5.7 байна. Аюулгүйн гарц заавал байх ёстой гэж үзжээ.

Хотын захиргаанаас хэрэв минут тутамд 10-аас олон тээврийн хэрэгсэл өнгөрөх боломж 4-ний 1-ээс их байна гэдгийг харуулж чадвал сургуулийн гаднах замд аюулгүйн гарцтай болох боломжтой гэжээ.

Хот руу болон хотоос гарах тээврийн хэрэгслийн урсгалыг хоорондоо хамааралгүй Пуасоны тархалтуудаар загварчилж болдог гэвэл хоёр чиглэлийн хувьд дараах байдалтай байна.

X-ээр үдийн 3 цагт хот руу ирэх тээврийн хэрэгслийн тоог тэмдэглэвэл $X \sim \mathrm{Po}(3.5)$ байна.

Y-ээр үдийн 3 цагт хотоос гарах тээврийн хэрэгслийн тоог тэмдэглэвэл $Y \sim \mathrm{Po}(5.7)$ байна.

T-ээр үдийн 3 цагт 2 чиглэлд хоюуланд нь явж өнгөрөх тээврийн хэрэгслийн тоог тэмдэглэвэл $T = X + Y$ байна. Тэгвэл T-ийн магадлалын тархалтыг дараах байдлаар олж болно.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(T=0) &= \mathrm{P}(X=0) \times \mathrm{P}(Y=0) \\ &= 0.0302 \times 0.0033 = 0.0001 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(T=1) &= \mathrm{P}(X=0) \times \mathrm{P}(Y=1) + \mathrm{P}(X=1) \times \mathrm{P}(Y=0) \\ &= 0.0302 \times 0.0191 + 0.1057 \times 0.0033 = 0.0009 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(T=2) &= \mathrm{P}(X=0) \times \mathrm{P}(Y=2) + \mathrm{P}(X=1) \times \mathrm{P}(Y=1) + \mathrm{P}(X=2) \times \mathrm{P}(Y=0) \\ &= 0.0302 \times 0.0544 + 0.1057 \times 0.0191 + 0.1850 \times 0.0033 = 0.0043 \end{aligned}$$

гэх мэтчилэн тооцоолно.

Ингэж тооцоолох нь маш их цаг зарцуулахыг харж байна.

Гэхдээ X ба Y нь харгалзан $\lambda,\ \mu$ дундажтай, үл хамаарах Пуасоны хоёр санамсаргүй хувьсагч бол $T = X + Y$ байх ба T нь $\lambda + \mu$ дундажтай Пуасоны санамсаргүй хувьсагч байна гэдгийг ашиглавал тооцоолол хялбар болно.

$X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ ба $Y \sim \mathrm{Po}(\mu) \Rightarrow X + Y \sim \mathrm{Po}(\lambda + \mu)$

$T \sim \mathrm{Po}(9.2)$ гэдгийг ашиглавал магадлалыг шууд олно.

$$P(T = 0) = e^{-9.2} = 0.0001$$
$$P(T = 1) = e^{-9.2} \times 9.2 = 0.0009$$
$$P(T = 2) = e^{-9.2} \times \frac{9.2^2}{2!} = 0.0043$$

гэх мэт тооцоолж болно.

T-ийн хувь дахь тархалтыг ашиглан зам дээрх нийт урсгалд минут тутам 10-аас олон тээврийн хэрэгсэл байх магадлалыг олж чадна.

$$\begin{aligned} P(T > 10) &= 1 - P(T \leqslant 10) \\ &= 1 - 0.6820 = 0.318 \end{aligned}$$

гарна.

Иймд Пуасоны магадлалын тархалтын загвар дээр тулгуурлан тооцоолоход минут тутамд өнгөрөх тээврийн хэрэгслийн тоо 10-аас их байх боломж нь 25%-аас их гарч буй тул энд гарц хийж болно гэж дүгнэж болно.

Жишээ: Нэгэн эмгэг өвчнөөс болж жилд дунджаар Шведэд 2.0, Норвегид 0.8, Финландад 0.5 хүн нас барж байв. Уг эмгэг санамсаргүй бөгөөд нэг нь нөгөөгөөсөө хамааралгүй тохиолддог.

Эдгээр гурван оронд дээрх өвчний улмаас нас барагсдын тоо 4 ба түүнээс олон байх магадлал ямар байх вэ?

Бодолт:

- P(4 ба түүнээс дээш хүн нас барах) = 1 – P(3 ба түүнээс доош хүн нас барах) байна.
- Эдгээр гурван тархалт бүрийн нөхцөл нь Пуасоны тархалтаар загварчлагдана гэдгийг анхаарна уу.

Эдгээр гурван тархалтын нийлбэрийг олж болох ба энэ нь нэг Пуасоны тархалт байна. 3 улсын хувьд 2.0 + 0.8+0.5=3.3 байх ба нийт тархалт нь $\mathrm{Po}(3.3)$ байна. Иймд 4 эсвэл түүнээс цөөн хүн нас барах магадлал нь

$$1 - e^{-3.3} \times \left(1 + 3.3 + \frac{3.3^2}{2!} + \frac{3.3^3}{3!}\right)$$

байна. Иймээс 4 эсвэл түүнээс дээш хүн нас барах магадлал нь 1 – 0.580 = 0.420 болно.

Санамж:

1. Хэрэв тархалтууд нь нэг нэгнээсээ үл хамаарах бол Пуасоны тархалтыг нэмж болно.
2. Пуасоны тархалтыг ийм замаар нэмж болно гэдгийг батална уу.

Жишээ: Шотландын зэлүүд газар дахь уулын замаар замаар 1 өдөрт дунджаар 6 суудлын тэрэг, 3 ачааны машин явж өнгөрдөг. Зам дээр хуучирсан үхрийн тор байдаг ба түүнийг засах хэрэгтэй байна. Хэрэв цагт 2-аас илүү тээврийн хэрэгсэл явж өнгөрөх магадлал нь 1% -иас хэтрэхгүй бол үхрийн торыг засварлах ажил ирэх хавар хүртэл хүлээх, нөгөө тохиолдолд өвөл болохоос өмнө засна гэж орон нутгийн ажлын алба шийдвэрлэсэн. Торыг хэзээ засах вэ?

Бодолт:

C нь цаг тутам өнгөрөх суудлын тэрэгний тоо, L нь цаг тутам өнгөрөх ачааны машины тоо, V нь цаг тутам өнгөрөх тээврийн хэрэгслийн тоо гэвэл $V = L + C$ байна.

Суудлын тэрэг ба ачааны машин зам дээгүүр явж өнгөрөх нь санамсаргүй бөгөөд өөр хоорондоо хамааралгүй тул

$$C \sim \mathrm{Po}(0.25),\ L \sim \mathrm{Po}(0.125)$$
$$V \sim \mathrm{Po}(0.25 + 0.125)$$
$$V \sim \mathrm{Po}(0.375)$$

1 өдөрт 6 суудлын тэрэг явах тул нэг цагт $\frac{6}{24} = 0.25$ суудлын тэрэг явна. Үүнтэй төстэйгөөр нэг цагт явах ачааны машины тоо нь $\frac{3}{24} = 0.125$ гэж олдоно.

Иймд бидний олох магадлал

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(V > 2) &= 1 - \mathrm{P}(V \leqslant 2) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-0.375} \times \left(1 + 0.375 + \frac{0.375^2}{2!}\right) \\ &= 0.006\,65 \end{aligned}$$

гэж гарна. Энэ нь 1%-аас бага тул засварын ажлыг ирэх хавар хүртэл хойшлуулна.

Санамж

Энэ тохиолдолд загварчлалтай холбоотой олон асуултууд гарч ирж байна.

1. Авто замаар суудлын тэрэг, ачааны машин явж өнгөрөх нь санамсаргүй үзэгдэл гэдэг нь үнэн үү эсвэл эдгээрийн зарим нь байнгын хэрэглэгчид, тухайлбал зам дагуух фермээс сүү авдаг машин байх уу? Хэрэв 3 суудлын тэрэг ба 1 ачааны машин нь өдөр тутмын байнгын хэрэглэгчид гэвэл энэ нь тооцоололд ямар нөлөө үзүүлэх вэ?
2. Суудлын тэрэг бүр эсвэл ачааны тэрэг бүр явж өнгөрөх нь өөр нэгнээсээ хамааралгүй гэдэг нь үнэн үү?
3. Зарим цагуудад илүү олон тээврийн хэрэгсэл явж өнгөрөх үү?
4. Унадаг дугуй, мотоцикл эсвэл бусад тээврийн хэрэгслийн тоо байхгүй. Яагаад ийм байж болж байна вэ?

Дасгал

1. Ням гарагийн өглөөний 2 цагаас 3 цагийн хооронд шөнийн тээврийн кафед зочлох суудлын тэрэг болон ачааны машины жолооч нарын тоо нь харгалзан 5.1 ба 3.6 дундажтай, үл хамаарах Пуасоны тархалтаар загварчлагддаг.

(i) Ням гарагийн өглөөний 2 цагаас 3 цагийн хоорондох дараах магадлалуудыг тооцоол.

(а) Яг 5 ачааны машины жолооч кафед зочлох

(б) Хамгийн багадаа 1 суудлын тэрэгний жолооч кафед зочлох

(в) Яг 5 ачааны машины жолооч ба яг 2 суудлын тэрэгний жолооч кафед зочлох

(ii) Кафед зочлох жолооч нарын нийт тооны тархалтыг ашиглан ням гарагийн өглөөний 2 цагаас 3 цагийн хооронд яг 7 жолооч байх магадлалыг ол. Ням гарагийн өглөөний 2 цагаас 3 цагийн хооронд зочилсон яг 7 жолоочийн яг 5 нь ачааны машины жолооч байх магадлалыг тооцоол.

2. Тэнхимийн эрхлэгчид ирэх утасны дуудлага хоорондоо хамаарлгүй бөгөөд санамсаргүй байдаг ба дотуур утаснаас 5 минут тутамд 2, гадуур утаснаас 5 минут тутамд 1 дуудлага ирдэг.

(i) 5 минутын хугацаанд тэнхимийн эрхлэгчид ирэх дуудлагын дараах магадлалуудыг ол.

(а) Яг 3 дотуур утасны дуудлага ирэх

(б) Хамгийн багадаа 2 гадуур утасны дуудлага ирэх

(в) Хамгийн ихдээ 5 дуудлага ирэх

(ii) Эрхлэгч 5 минутын хугацаанд нийт 4 дуудлага авсан бол эдгээрийн яг 2 нь дотуур утаснаас ирэх магадлалыг ол.

(iii) 1-минутын хугацаанд ямар ч дуудлага ирэхгүй байх магадлалыг ол.

3. X ба Y гэсэн хоёр санамсаргүй хувьсагч харгалзан $X \sim \mathrm{Po}(1.4)$ $Y \sim \mathrm{Po}(3.6)$ хамааралгүй Пуасоны тархалтаар өгөгдсөн.

(i) X ба Y-ийн тархалтыг ашиглан тооцоол.

(а) $\mathrm{P}(X + Y = 0)$

(б) $\mathrm{P}(X + Y = 1)$

(в) $\mathrm{P}(X + Y = 2)$.

T санамсаргүй хувьсагчийг $T = X + Y$ гэж тодорхойлъё.

(ii) T-ийн тархалтыг бич.

(iii) (ii)-д олдсон тархалтыг ашиглан (i) хэсгийн үр дүнг шалга.

4. Нэг хүү авто замаар явж буй тээврийн хэрэгслүүдийг харж байв. Түүний харсан бүх тээврийн хэрэгсэл нь суудлын тэрэг эсвэл ачааны машин байв. Эдгээр нь хоёр үл хамаарах Пуасоны тархалтаар загварчлагдаж болно. 1 минут тутам дахь суудлын тэрэгний тоо 8.3, ачааны машины тоо 4.7 байсан.

   (i) 1 минутын хугацаан дахь дараах магадлалыг тооцоол.

      (а) Яг 7 машин харах

      (б) Хамгийн багадаа 3 ачааны машин харах

   (ii) 1 минутын хугацаанд түүний харсан нийт машины тоо 10 байх магадалыг тооцоол.

   (iii) 30 секундын хугацаанд 8-аас бага машин олж харах магадлалыг ол.

5. Амьтан асрах газрын өдөр тутам аврах муурны тоо нь 2.5 параметртэй Пуасоны тархалтаар загварчлагддаг. Харин өдөр бүр аврах нохойны тоо нь 3.2 параметртэй үл хамаарах Пуасоны тархалтаар загварчлагддаг.

   (i) Санамсаргүй сонгосон өдөр асрах газрын амьтан аврах дараах магадлалыг тооцоол.

      (а) Яг 2 муур байх

      (б) Яг 3 нохой байх

(в) Нийлээд яг 5 муур ба нохой байх

(ii) Нэн өдөрт яг 5 нохой ба муур аврагдсан бол эдгээрийн яг 2 нь муур байх нөхцөлт магадлалыг ол.

6. A, B гэсэн цацраг идэвхит хоёр бодис нэг минут тутамд задрах задрал нь үл хамаарах бөгөөд харгалзан 2.8 ба 3.25 гэсэн дундажтай Пуасоны тархалт байв.

   1 минутын хугацаан дахь дараах магадлалыг тооцоол.

   (i) A-аас хамгийн багадаа 3 задрал явагдах

   (ii) Хоёр бодисын нэгнээс нь 1, нөгөөхөөс нь 2 задрал явагдах магадлал

   (iii) Нийтдээ 5 задрал явагдах

7. Компанийн утасны харилцуураар 1 минут тутамд хүлээн авсан утасны дуудлагын тоо дундаж нь 1.92 байх Пуасоны тархалт байв.

   (i) Дараах үзэгдлүүдийн магадлалыг тооцоол.

   (а) 1 минутын завсарт яг 2 дуудлага хүлээн авах

   (б) 5 минутын завсар бүрт яг 2 дуудлага хүлээн авах

   (в) 5 минутын 1 завсарт хамгийн багадаа 5 дуудлага хүлээн авах

Уг харилцуураар 1 минут тутамд гадагш хийх дуудлагын тоо нь λ дундажтай Пуасоны тархалт байсан. 1 минутын завсарт гадагшаа дуудлага хийхгүй байх хувь нь 20% байв. Ирэх болон гадагш хийх дуудлага нь үл хамаарна.

(ii) λ-ийн утгыг ол.

(iii)Уг харилцуураар 1 минутын завсарт дамждаг ирэх болон гарах нийт 4 дуудлага байх магадалыг ол.

(iv) Харилцуураар 1 минутын завсарт дамждаг ирэх болон гарах яг 4 дуудлаганы 2 нь ирэх, 2 нь гарах дуудлага байх магадлалыг ол.

8. Гэртээ тоглож буй болон Премьер лигийн биш багуудын тоглолт бүрд хийсэн голын тоог харгалзан 1.63 ба 1.17 дундажтай үл хамаарах Пуасоны тархалтаар загварчилсан гэе.

   (i) Санамсаргүй сонгосон тоглолтын хувьд дараах магадлалыг тооцоол.

      (а) Гэртээ тоглож байгаа баг хамгийн багадаа 2 гоол хийх

      (б) 1-1 гоолоор тэнцэх

      (в) Тэдний гоолын тоо нийлээд 5 байх.

   (ii) Уг загвар яагаад тохиромтой биш байгааг үндэслэх 2 шалтгаан хэл.

9. Би өдөр бүр гэртээ компьютераасаа имэйлийн тоог шалгадаг. 100 хоногийн санамсаргүй түүврийн өдөр тутам хүлээж авсан имэйлийн тоо x-ийн тоог нэгтгэн үзүүлэв.

$$\sum x = 4, \qquad \sum x^2 = 514$$

(i) Өгөгдлийн хувьд дундаж болон вариацыг тооцоол.

(ii) Өдөр тутам хүлээн авсан имэйлийн тоог загварчлахад Пуасоны тархалт яагаад тохиромжтой болохыг тайлбарлах 2 шалтгаан хэл.

(iii) (i) хэсэгт олсон дунджийг ашиглан 100 өдрийн хугацаанд яг 2 имэйл авсан байх өдрийн таамагласан утгыг ол.

Ажлын өдрүүдэд би оффис дээрээ бас имэйлээ шалгадаг. Оффис дээр 1 өдөр тутам хүлээн авсан имэйлийн тоо нь λ дундажтай Пуасоны тархалт байдаг. Ажлын өдрүүдэд оффис дээр имэйл хүлээн авахгүй байх нь 1.5% байдаг.

(iv) $\lambda = 4.2$ байхыг харуул. Мөн түүнчлэн ажлын 1 өдөрт оффис дээр хамгийн багадаа 5 имэйл хүлээн авах магадлалыг ол.

(v) Ажлын 1 өдөрт нийтдээ 10 имэйл (гэртээ болон оффис дээр) хүлээн авах магадлалыг ол.