Пуасоны тархалт

ElectricsExpress.com
Бидний "Дараагийн өдөр хүргэх баталгаа" үйлчилгээ хэрэгжиж эхэлснээр захиалгын тоо эрс өссөн. Бид одоо имэйлээр цахилгаан бараа захиалах хамгийн алдартай вэбсайтуудын нэг юм. Бүтээгдэхүүний энэ их эрэлтийг даван гарахын тулд илүү олон ажилтнуудыг авч ажиллуулж хэрэглэгчиддээ баталгаа болгохыг хүсч байна. Хэдийгээр эрэлтийн түвшинг таамаглах боломжгүй боловч цагт дунджаар 150 захиалга хүлээн авч байгааг бид мэднэ.

Тэдний вэбсайт дээрх энэ мэдээлэл нь нэгэн статистикчийг ElectricsExpress.com сайт руу холбогдох сэдлийг төрүүлжээ. Тэрээр өгөгдөлд дүн шинжилгээ хийхийг оролдсон ба түүний хариулт өгч чадах зүйлс нь юу болохыг харцгаая.

Тэр нарийвчилсан судалгаа хийхийн тулд минут тутам дахь захиалгын тооны тархалтыг тооцоолох хэрэгтэй гэж үзээд өнгөрсөн нэг сарын турш дахь нэг-минутын 1000 удаагийн санамсаргүй түүврийг сонгож дараах өгөгдлийг цуглуулав.

Минут тутам дахь захиалгын тоо	0	1	2	3	4	5	6	7	>7
Давтамж	70	215	265	205	125	75	30	10	5

Тэрээр энэ давтамжийн тархалтын хувьд

$$n = 1000, \quad \sum xf = 2525 \text{ ба } \sum x^2 f = 8885$$

$$\Rightarrow \overline{x} = 2.525 \text{ ба } sd = 1.58 \text{ (3 орны нарийвчлалтай)}$$

байхыг тооцоолоод мөн дараах зүйлийг онцолсон. Үүнд:

- Вэбсайт дээрх захиалгууд нь санамсаргүй бөгөөд хоорондоо холбоо хамааралгүй хийгддэг

- Минут тутам дахь захиалгын дундаж тоо нь ойролцоогоор 2.5 бөгөөд энэ нь цаг тутам дахь 150 захиалгатай тэнцүү.

Тэрээр захиалгын тооны магадлалын тархалтыг Пуассоны тархалтаар загварчлах зүйтэй байна гэж санал болгожээ.

Нэг минут тутам дахь захиалгын дундаж тоо нь 2.5 байх Пуасоны тархалт нь төгсгөлөгүй, дискрет санамсаргүй хувьсагч гэж тодорхойлогддог ба

$$P(X = r) = e^{-2.5} \times \frac{2.5^r}{r!}, \quad r = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

байна.

Энд:

- X-ээр "1 минут тутам дахь захиалгын тоо" гэсэн санамсаргүй хувьсагчийг тэмдэглэсэн

- e нь 2.718 281 828 459... тогтмол тоо

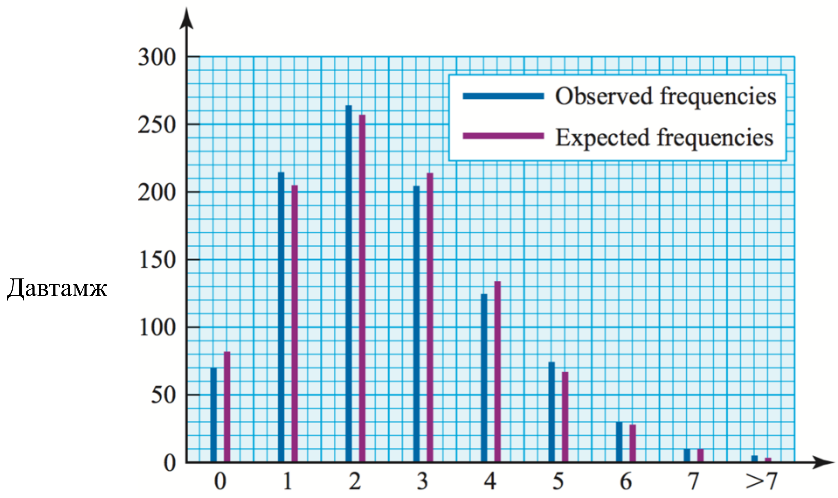
- $e^{-2.5}$ -ийг тооны машин ашиглан 0.082 (таслалаас хойш 3 орны нарийвчлалтайгаар) гэж олж чадна.

- $r!$ нь r-ийн факториал, жишээлбэл, $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ байна.

Харгалзах магадлалын тархалтын утгыг томьёо ашиглан тооцоолж хүснэгтээр харуулж болох бөгөөд үүнийг таамаглаж буй давтамжийнх нь хамт харууллаа. Тухайлбал,

Минут тутам дахь захиалгын тоо (r)	0	1	2	3	4	5	6	7	>7
Ажиглагдсан давтамж	70	215	265	205	125	75	30	10	5
$P(X = r)$	0.082	0.205	0.257	0.214	0.134	0.067	0.028	0.010	0.003
Таамагласан давтамж	82	205	257	214	134	67	28	10	3

Ажиглагдсан болон таамаглаж буй давтамжуудын ойролцоо байдалыг харвал (Зургийг үзнэ үү) энэ тохиолдолд тохиромжтой загвар нь Пуасоны тархалт болохыг харуулж байна.



1 минут тутам дахь захиалгын тоо

Мөн түүнчлэн түүврийн дундаж $\bar{x} = 2.525$ нь түүврийн вариац $s^2 = 2.509$ (4 орны нарийвчлалтай)-тай маш ойролцоо байна. Пуасоны тархалтын хувьд таамаглал болон вариац нь ижил болохыг дараагийн удаа харна. Иймд энэ 2 статистик үзүүлэлт нь ойролцоо байгаа тул Пуасоны тархалт нь тохиромжтой загвар болохыг харуулж байна.

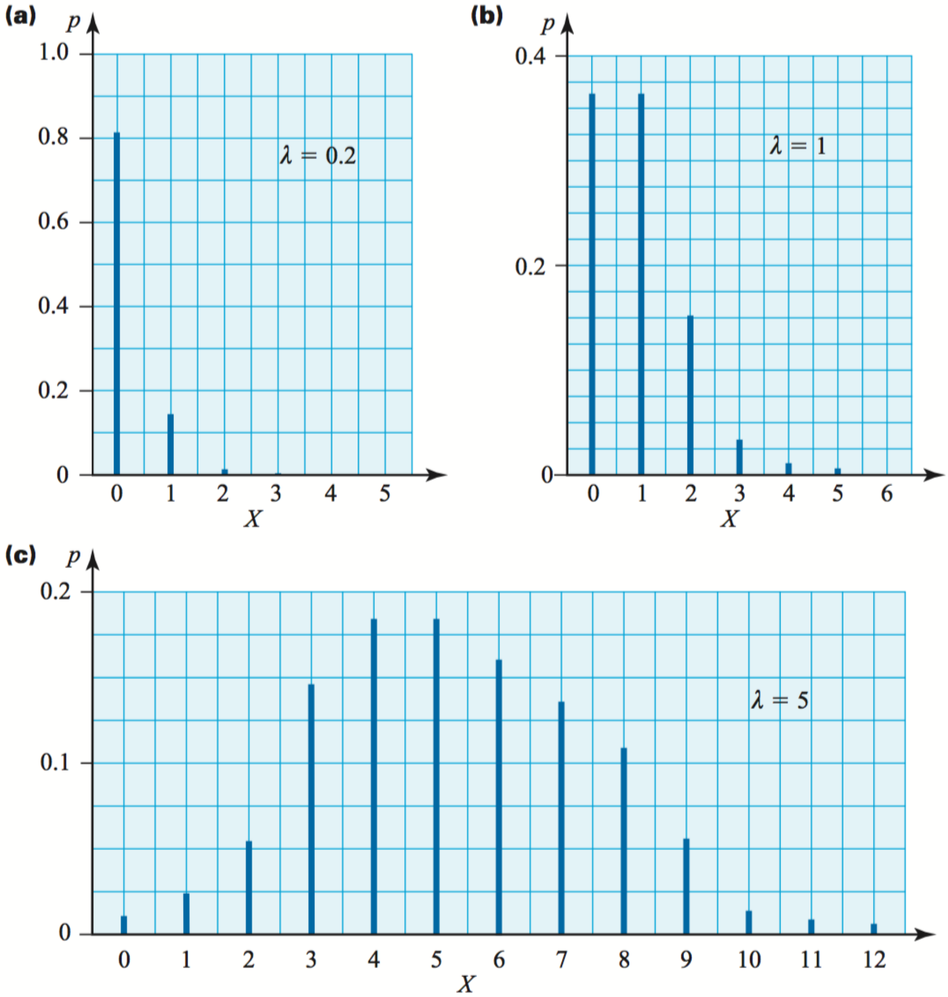
Пуассоны тархалт

Дараах тохиолдолд дискрет санамсаргүй хувьсагчийг Пуасоны тархалтаар загварчилж болно. Үүнд:

- Үзэгдлүүд нь хугацааны тодорхой завсарт санамсаргүй бөгөөд хамааралгүйгээр явагддаг
- Өгөгдсөн завсар дахь үзэгдлүүдийн дундаж тоо λ нь жигд, төгсгөлөг байдаг

Өгсөн завсарт үзэгдэл илрэх тоог X гэвэл $P(X = r) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^r}{r!}$ байх ба энд $r = 0, 1, 2, 3, 4, 6 \ldots$ байна.

Өмнө авч үзсэн дискрет санамсаргүй хувьсагчийн нэгэн адил Пуасоны тархалтыг босоо шугаман диаграмаар харуулж болно. Пуасоны тархалтын хэлбэр нь λ параметрийн утгаас хамаарна. Хэрэв λ нь бага бол тархалт нь эерэг муруйлттай байх боловч λ өсөх тусам тархалт нь тэгш хэмтэй хэлбэр лүү илүү дөхнө. Пуасоны тархалтын нийтлэг гурван хэлбэрийг дараах зурагт үзүүлэв.



Үзэгдэл цор ганц илэрдэг ба хугацааны өгсөн завсарт илрэх дундаж тоо нь жигд байх тохиолдол, жишээнүүд олон байдаг. Ийм үзэгдлүүдийн жишээ гэвэл, хөл бөмбөгийн тэмцээн дэх багийн гоолын тоо, валют солилцооны газрын 1 минут тутамд хүлээн авсан утасны дуудлага, долоо хоног тутамд үйлдвэрт гарсан ослын тоо, хагас задралын хугацаа нь харьцангуй урт, цацраг идэвхт бодисын 1 минут тутамд задрах бөөмийн тоо, баримт бичигт 1 хуудас бүрт бичсэн алдааны тоо, хуйлаастай даавууны 1 метр тутам дахь өнхрөлтийн тоо, усны цөөрмийн 1 миллитр бүр дэх бичил биетний тоо гэх зэргийг дурдаж болно.

Жишээ 1: Цахилгаан утасны сүлжээн дэх гэмтлийн тоог километр тутамд 1.5 гэмтэл жигд илэрдэг Пуасоны тархалтаар загварчилж болно. Тэгвэл дараах магадлалуудыг ол.

(i) Сүлжээний 1 километрт зөвхөн 3 гэмтэл илрэх байх

(ii) Сүлжээний 1 километрт хамгийн багадаа 5 гэмтэл илрэх

Бодолт: Сүлжээний 1 километр тутамд илрэх гэмтлийн тоог X–ээр тэмдэглэвэл

$$\mathrm{P}(X=r)=\mathrm{e}^{-1.5}\times\frac{1.5^r}{r!}\qquad \text{for}\qquad r=0,1,2,3,4,\ldots$$

(i) $\mathrm{P}(X=3)=\mathrm{e}^{-1.5}\times\frac{1.5^3}{3!}$

$= 0.125\,510\ldots$

$= 0.126$ (to 3 s.f.)

(ii) $\mathrm{P}(X\geqslant 5)=1-[\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)]$

$$=1-\left[\mathrm{e}^{-1.5}\times\frac{1.5^0}{0!}+\mathrm{e}^{-1.5}\times\frac{1.5^1}{1!}+\mathrm{e}^{-1.5}\times\frac{1.5^2}{2!}+\mathrm{e}^{-1.5}\times\frac{1.5^3}{3!}+\mathrm{e}^{-1.5}\times\frac{1.5^4}{4!}\right]$$

$$=1-[0.223\,130\ldots+0.334\,695\ldots+0.251\,021\ldots+0.125\,510\ldots+0.047\,066\ldots]$$

$= 0.0186$ (to 3 s.f.)

гэж олдоно.

Пуасоны тархалтын магадлалыг тооцоолох

Жишээ 1-д цахилгаан утасны сүлжээний гэмтлийн тухай авч үзсэн ба $P(X\geq 5)$ үед тооцоолсон. Энд бид $P(X\geq 5) = 1 - P(X\leq 4)$ байхыг ашигласан бөгөөд энэ нь гэмтэл 5 болон түүнээс их байх магадлалуудыг бүгдийг нь олж нэмэх ажлыг хөнгөвчилж өгч байна. Иймэрхүү тооцоолол нь урт хугацаа шаардах боловч эцэст нь гишүүдийн утга нь багассаар багассаар тодорхой хугацааны дараа өөрийн хүссэн нарийвчлалтайгаар олж болно. Гэхдээ Жишээ 1-д таван тохиолдолд магадлалын нийлбэрийг олох замаар бодож байгаа нь хугацаа маш их хэмнэж байна. Энд бид тооцооллыг багасгаж, хугацааг хэмнэх аргыг авч үзэж байна.

Реккурент харьцаа

λ параметртэй Пуасоны тархалтыг авч үзье.

$P(X=0) = e^{-\lambda}$ Тооны машин ашиглан энэ гишүүнийг олно.

$P(X=1)= e^{-\lambda}\times\lambda=\lambda P(X=0)$ Өмнөх гишүүнийг λ-аар үржинэ.

$P(X=2)= e^{-\lambda}\times\frac{\lambda^2}{2!}=\frac{\lambda}{2}P(X=1)$ Өмнөх гишүүнийг $\frac{\lambda}{2}$-оор үржинэ.

$P(X=3)= e^{-\lambda}\times\frac{\lambda^3}{3!}=\frac{\lambda}{3}P(X=2)$ Өмнөх гишүүнийг $\frac{\lambda}{3}$-аар үржинэ.

$P(X=4)= e^{-\lambda}\times\frac{\lambda^4}{4!}=\frac{\lambda}{4}P(X=3)$ Өмнөх гишүүнийг $\frac{\lambda}{4}$-өөр үржинэ.

Ерөнхий тохиолдолд, өмнөх $P(X=r-1)$ магадлалыг $\frac{\lambda}{r}$-ээр үржиж $P(X=r)$ магадлалыг олж болно. Тооны машин дээрээ хамгийн сүүлийн утга болон санах ойд бүх тооцооллыг хадгалах хэрэгтэй.

Үүнийг $\lambda = 1.5$ (Жишээ 1-ээс гаргах) үед гүйцэтгэвэл дараах үр дүн гарна.

Үзэгдэл илрэх тоо	Шилжүүлэх	$P(X = r)$	Нийт, $P(X \leq r)$
0		0.223130…	0.223130…
1	$\times 1.5$	0.334695…	0.557825…
2	$\times \frac{1.5}{2}$	0.251021…	0.808846…
3	$\times \frac{1.5}{3}$	0.125510…	0.934356…
4	$\times \frac{1.5}{4}$	0.047066…	0.981422…

Хугацааны ялгавартай завсар дээр Пуасоны тархалтыг тооцоолох

Жишээ 2: Жасмит автоматаар хариулдаг утасны төхөөрөмж худалдаж авахаар төлөвлөж байна. Тэрээр таван өдөр төхөөрөмжийг үнэгүй ашигласан бөгөөд түүн дээр 22 зурвас үлдсэнийг олж мэджээ. Хэрэв үүнийг худалдаж авсан тохиолдолд энэ нь түүний ердийн хэрэглээ гэж үзвэл дараах зүйлүүдийг тооцоол. Үүнд:

(i) Өдөр тутам ирэх зурвасны дундаж тоо

(ii) Тухайн нэг өдөр яг 6 зурвас авах магадлал

(iii) 2 өдөр яг 6 зурвас авах магадлал

Бодолт:

(i) 5 өдрийн дунджийг нэг өдрийн дундаж руу хөрвүүлбэл,

1 өдрийн дундаж $= \frac{22}{5} = 4.4$ зурвас болно.

(ii) 1 өдөр тутам хүлээн авах зурвасны тоог X гэвэл

$$\mathrm{P}(X = 6) = \mathrm{e}^{-4.4} \times \frac{4.4^6}{6!}$$
$$= 0.124$$

гэж гарна.

(iii) 2 өдрийн дундаж нь $2 \times \frac{22}{5} = 8.8$ зурвас байна. Иймд 2 өдөрт яг 6 зурвас байх магадлал нь $e^{-8.8} \times \frac{8.8^6}{6!} = 0.0972$ гэж олдоно.

Пуасоны тархалтаар загварчлах

ElectricsExpress.com-ын жишээнд вэбсайт дээр минут тутамд байрлуулсан захиалгын тооны дундаж болон вариац нь $\bar{x} = 2.525$ ба $s^2 = 2.51$ (3 орны нарийвчлалтай) өгсөн. Харгалзах Пуасоны тархалтын параметр λ-г 2.5 гэж авсан.

Пуасоны тархалтын хувьд

$$\text{Дундаж} = E(X) = \lambda \quad \text{ба} \quad \text{Вариац} = Var(X) = \lambda$$

байхыг харуулж болно.

Пуассоны тархалтыг Po(λ) эсвэл Poisson(λ) гэж тэмдэглэдэг. Өгөгдлийг Пуасоны тархалтаар загварчлах үед дундаж ба вариац ойролцоо утгатай байх нь тухайн өгөгдлөлд уг загвар тохирч байгааг илтгэх нэг шинжүүр юм.

Цуглуулсан өгөгдлийг Пуасоны тархалтаар загварчилж болох эсэхийг дараах алхмуудын дагуу шалгаарай.

- Дундаж ба вариацыг олж, тэдгээр нь ойролцоогоор тэнцүү эсэхийг шалгана.
- Түүврийн дунджийг ашиглан Пуасоны тархалтыг олох ба таамаглаж буй давтамжийг тооцоолно.
- Таамаглаж буй давтамжийг туршилтын давтамжтай харьцуулна.

Дасгал

1. Хэрэв $X\sim$ Po(1.75) бол Пуасоны тархалтын томьёог ашиглан тооцоол.

(i) $P(X = 2)$ (ii) $P(X > 0)$

2. Хэрэв $X\sim$ Po(1.75) бол Пуасоны тархалтын томьёог ашиглан тооцоол.

(i) $P(X = 3)$ (ii) $P(X < 2)$ (iii) $P(X \geq 2)$

3. Австралийн замын тодорхой хэсэгт 1 өдөр тутамд алагдсан жижиг хулганы тоог Po(0.42) санамсаргүй хувьсагчаар загварчилж болно.

(i) Замын энэ хэсэгт тухайн нэг өдөрт яг 2 хулгана алагдсан байх магадлалыг тооцоол.

(ii) Замын энэ хэсэгт 5- өдрийн хугацаанд яг 4 хулгана алагдсан байх магадлалыг тооцоол.

4. Үсэг өрөгч нь 500 хуудастай номонд 1500 алдаа гаргадаг. Алдааны тоо нь

(i) 0 (ii) 1 (iii) 2 (iv) 3 ба түүнээс дээш

байх хуудасны тоог таамагла. Өөрийн хийсэн зүйлээс ямар нэгэн таамаглал дэвшүүл.

5 . Нэгэн улсад аянганд өртөж нас барагсдын тоо жилд дунджаар 2.2 байдаг.

(i) Аянганд өртөж нас барагсдын тоо 1 жилд 0, 1, 2 ба 2-оос олон байх магадлалыг ол.

Хил залгаа нэгэн улсад 20 хүн нэг жил аянганаас болж нас бардаг гэдгийг олж мэджээ.

(ii) Тус улсад 1 жилд аянганд өртөж нас барагсдын дундаж тоог ол.

6. 350 үзмийг зуурмагт хийж сайтар хольсоны дараа 100 жижиг талх хийдэг. Эдгээр талхны хэд нь

(i) үзэмгүй байх

(ii) 5 болон түүнээс олон үзэмтэй байхыг тооцоол.

100 талхны 2 дахь багцад яг 1 нь үзэмгүй байдаг бол

(iii) 2 дахь зуурмаган дахь үзэмний нийт тоог ол.

7. Гатлага онгоц нь арлаас эх газар руу богино аялалаар машин болон бага оврын ачааны машин тээвэрлэдэг. Ажлын өдрүүдийн өглөөг төлөөлөх нэгэн түүвэр буюу 8 цагт тээвэрлэгдсэн тээврийн хэрэгслийн тоо X нь дараах байдалтай байв.

20 24 24 22 23 21 20 22 23 22

21 21 22 21 23 22 20 22 20 24

(i) X нь Пуасоны тархалт биш гэж харуул.

Үнэндээ 20 тээврийн хэрэгсэл нь ажлын өдрүүдийн өглөө бүр гаталга онгоцоор аялдаг байнгын зорчигчдынх байдаг. Санамсаргүй хувьсагч Y-ээр гаталга онгоцыг ашигладаг 20 зорчигчдынхоос бусад тээврийн хэрэгслийн тоог тэмдэглэе.

(ii) Y-ийг Пуасоны тархалтаар тархалтаар загварчилж болох эсэхийг судал.

Гаталга онгоц нь нэг аялалаар 25 тээврийн хэрэгсэл авч явж чадна.

(iii) Зай байхгүйгээс шалтгаалан дараагийн онгоцыг хүлээх хэрэгтэй болдог ба хамгийн багадаа 1 тээврийн хэрэгслийг гаталга онгоцоор тээвэрлэж чадахгүй байх хугацааг таамагла.

8. Хайлуулсан шилээр шилэн лонх хийхэд жижиг хатуу хэсгүүд илэрдэг. Хайлуулсан шилний 100 кг тутамд дунджаар 15 жижиг хатуу хэсэг илэрдэг. Хэрэв лонхонд 1 ба түүнээс олон хатуу хэсэг байвал түүнийг хаяна. 1кг масстай лонх хийх гэж байгаа гэе. Тэгвэл бид хаягдах шилний хувийг тооцоолох шаардлагатай. “100 шилний материалд 15 хатуу хэсэг илэрдэг, ойролцоогоор 15 хувь нь хаягдана ” гэсэн хариултыг шалга. Тохиромжтой таамаглал хийх хэрэгтэй ба Пуасоны загварыг ашиглан зөв тайлбар гаргаж, 1 кг шил хаягдал болох хувийг 3 орны нарийвчлалтай ол. 0.25 кг масстай шилний хувьд ойролцоогоор 3.7% нь хаягдал болно гэж харуул.

9. Байрны цахилгаан шатны нэг давхарт 5 минут тутамд дунджаар 4 хүн санамсаргүй бөгөөд хамааралгүйгээр ирдэг.

(i) 1 минутын хугацаанд яг хоёр хүн ирэх магадлалыг ол.

(ii) 15 секундын хугацаанд ямар ч хүн ирэхгүй байх магадлалыг ол.

(iii) Дараагийн t минутанд хамгийн багадаа 1 хүн ирэх магадлал нь 0.9 байв. t-ийн утгыг ол.

10. Дэлгүүрийн эзэн цахилгаан сэнс зардаг. Үйлчлүүлэгчдийн эрэлт долоо хоног тутам дундаж нь 3.2 байх Пуасоны тархалтаар загварчлагддаг.

(i) Долоо хоногт яг 2 үйлчлүүлэгчтэй байх магадлалыг ол.

(ii) Долоо хоногийн эхээр түүний дэлгүүр 4 үйлчлүүлэгчтэй байсан. Тэгвэл энэ долоо хоногт үйлчлүүлэгчдийн эрэлтийг хангаж чадахгүй байх магадлалыг ол.

(iii) Долоо хоногийн эхээр түүний дэлгүүрт n үйлчлүүлэгч байсан гэвэл үйлчлүүлэгчийн эрэлтийг хангаж чадахгүй байх магадлал нь 0.05-аас бага байх n-ийн хамгийн бага утгыг туршилт, алдааг ашиглан ол.

11. Супермаркетын кассанд 3 минут тутамд 2 хүн санамсаргүй бөгөөд хамааралгүйгээр ирдэг.

(i) 5 минутын хугацаанд яг 4 хүн ирэх магадлалыг ол.

Энэ супермаркетын өөр хэсэгт байгаа кассан дээр минут тутамд 1 хүн санамсаргүй бөгөөд хамааралгүйгээр ирдэг.

(ii) Тооцооны энэ 2 хэсэгт 3 минутын хугацаанд нийтдээ 3-аас бага хүн ирэх магадлалыг ол.

12. Зэвсгийн үйлдвэрийн эзэн тухайн буугаар зорилтот газар руу 20 раунд тус бүр, нийт 500 багц буудах замаар нарийвчлал өндөртэй эсэхийг шалгадаг. Хэрэв тэмдэглэсэн тойргийн гадна тусвал үүнийг алдаанд тооцогдоно. 20 раундын багц тутамд алдааг тоолсон.

Алдаа, X	0	1	2	3	4	5	6-20
Давтамж	230	189	65	15	0	1	0

(i) Багц тутам дахь алдааны дундаж тоог ол.

(ii) Дундажийг ашиглан багцад 0, 1, 2, 3, 4 ба 5 алдаа байх магадлалыг Пуасоны тархалтаар загварчлан ол.

(iii) (ii) дахь хариуг ашиглан 500 багц дахт багц тутамд 0, 1, 2, 3, 4 ба 5 алдаатай байх таамагласан давтамжийг тооцоолж, хариугаа харьцуул.

(iv) Энэ тохиолдолд Пуасоны тархалт нь сайн загвар болсон гэж бодож байна уу?