ХүЛЭЭЛГИЙН ОНОЛЫН УДИРТГАЛ

1

Систем хоёр ширхэг ATM байгаа гэж үзье. Үйлчилгээнд дараах гурван зарчмыг баримтална.

(1) Системд ирсэн үйлчлүүлэгч хэрэв дээрх хоёр машины аль нэг нь сул байвал сул байгаа машинаар үйлчлүүлнэ.
(2) Хоер машин хоёулаа завгүй байвал хүлээх дарааллын дагуу зогсож өөрийн ээлжиig хүлээнэ. Ийм зарчмын үйлчилгээг First Come First Service буюу FCFS үйлчилгээ гэж нэрлэдэг.
(3) Үйлчлүүлж дууссан хүн системийг шууд орхин явна.

Энэ систем дэхь үйлчлүүлэгчийн хөдөлгөөн нь үйлчлүүлэгчдийн системд хүрэлцэн ирэх интервал(тухайн үйлчлүүлэгчийн ирснээс хойш дараагийн үйлчлүүлэгч ирэх хугацаа) болон үйлчлүүлэх хугацаа хоёроор тодорхойлогдоно. Ийм системийн анализ хийхэд магадлалын симулешн чухал үүрэгтэй. Хүснэгтэд тухайн банкаар үйлчлүүлсэб 50 хүний өгөгдлийг үзүүлэв.

Магдалалын симулешнийг үр дүнтэй явуулахын тулд туршилтын өгөгдлийг олон байлгах хэрэгтэй байдаг. 50 хүний ажиглалтын өгөгдөл өгсөн тохиолдолд 50 хүртэл хүний л симулешн хийх боломжтой. Өгөгдөл ашиглан үйлчлүүлэгчийн системд хүрэлцэн ирэх хугацааны интервал, үйлчилгээний хугацааны тархалтыг илэрхийлж чадахуйц магадлалын тархалтууд болон тэдгээрийн харгалзах параметрүүдийн утгыг олж, дээрх тархалтуудад нийцтэй санамсаргүй тоонуудын тусламжтайгаар үйлчлүүлэгчид болон тэдгээрийн үйлчилгээний хугацааны цувааг симулешны тусламжтайгаар үүсгэнэ.

Бид эхлээд үйлчлүүлэгчид системд хүрэлцэн ирэх хугацааны интервалын тархалтын магадлалын тархалтыг тодорхойлоё. Үйлчлүүлэгчид системд ирэх хугацааны хистограммыг 1.1 зурагт үзүүлэв. Энэ хистограмм нь 1.2 зурагт үзүүлсэн илтгэгч тархалтад захирагдаж байгааг анзаарч болно. Ерөнхий тохиолдолд банкны үйлчлүүлэгч системд ирэх хугацааны интервалыг илтгэгч тархалттай гэж авдаг.

Нягт нь $1/\lambda$ байх илтгэгч тархалтын нягтын функц

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0$$

хэлбэртэй бөгөөд $t < 0$ тохиолдолд нягт 0 байдаг. Иймд тархалтын функц

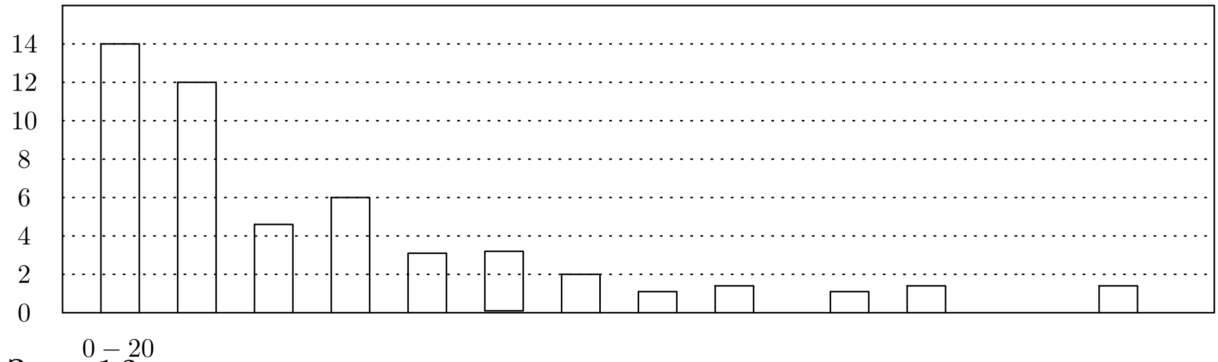
$$F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t}$$

болно. Энэ тархалтын дисперс $1/\lambda^2$ байдаг.

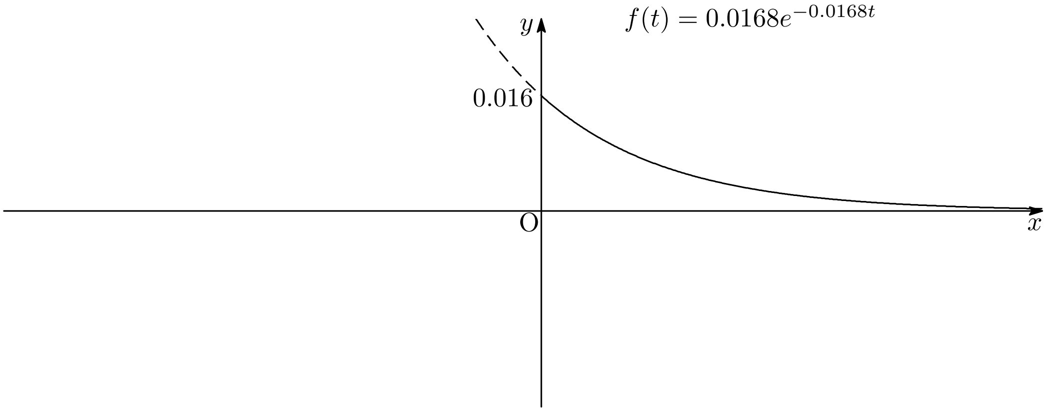
Хүснэгт 1.1.

No	Ирэх хугацаа	Үйлчилгээний хугацаа	log
1	25	40	3.6889
2	170	47	3.6109
3	101	168	5.1240
4	308	58	4.0604
5	27	89	4.4886
6	2	52	3.9512
7	31	60	4.0943
8	80	59	4.0775
9	29	133	4.8903
10	16	27	3.2958
11	21	113	4.7274
12	16	26	3.2958
13	37	60	4.0943
14	88	190	5.2470
15	121	72	4.2767
16	76	58	4.0604
17	201	48	3.8712
18	74	64	4.1589
19	91	46	3.8286
20	14	73	4.2905
21	59	124	4.8203
22	28	143	4.9628
23	1	81	4.3944
24	4	65	4.1744
25	43	64	4.1589
26	28	99	4.5951
27	1	184	5.2149
28	48	115	4.7449
29	37	81	4.3944
30	232	70	4.2485
31	1	372	5.9189
32	6	103	4.6347
33	7	48	3.8712
34	54	65	4.1744
35	1	79	4.3694
36	64	45	3.8067
37	1	55	4.0073
38	2	65	4.1744
39	143	202	5.3083
40	130	317	5.7589
41	11	232	5.4467
42	26	24	3.1781
43	39	92	4.5218
44	22	318	5.7621
45	45	33	3.4965
46	62	17	2.8332
47	77	36	3.5835
48	104	86	4.4543
49	69	131	4.8752
50	104	54	3.9890
$\sum$	2977	4889	217.4483
дундаж	59.54	97.78	4.3490
дисперс	4019.41	5895.53	0.4366

Зураг 1.1.



Зураг 1.2.



Үйлчлүүлэгч системд ирэх хугацааны интервал илтгэгч тархалттай гэж үзсэн тохиолдолд, үйлчлүүлэгч системд t хугацаанд биш түүнээс ялимгүй хоцорч dt хугацааны дараа системд ирсэн гэе. Өөрөөр хэлбэл үйлчлүүлэгч системд t-с $t + dt$ хугацааны хооронд ирнэ гэсэн үг бөгөөд энэ үзэгдлийн магадлал

$$\frac{F(t+dt) - F(t)}{1 - F(t)} = \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+dt)}}{e^{-\lambda t}} = 1 - e^{-\lambda t}$$

болж t-с хамаарахгүй болох нь мэдэгдэнэ.

Бас хугацааны тухайн агшнаас хойш dt хугацааны хооронд дараагийн үйлчлүүлэгч ирэх магадлал, өмнөх үйлчлүүлэгчээс хамааралгүй $1-e^{\lambda t}$ болно. Илтгэгч тархалтыг λ-гийн тусламжтайгаар л илэрхийлэх учир энэ утгыг тодорхойлоё. 1.1 хүснэгтийн өгөгдлийн дундаж болон илтгэгч тархалтын дундаж утга хоёрыг давхцаж байхаар авъя. Үүнийг моментийн арга гэж нэрлэдэг. Түүврийн дундаж утга 59.5 учир

$$\frac{1}{\lambda} = 59.5 \text{ буюу } \lambda = 1/59.5$$

юм. Энэ тохиолдолд тархалтын дисперс 3540.08 бөгөөд өгөгдлийн дисперс 4019.41-тэй ойролцоо байна. Эдгээр утга хоорондоо тэнцэхгүй байгаа нь түүврийн өгөгдөл илтгэгч тархалтыг бүрэн дагахгүй байгаатай холбоотой юм.

Дараа нь үйлчлэх хугацааны тархалтыг тогтооё. 1.1 хүснэгтийн 4-р баганад өгсөнтэй ижлээр үйлчилгээний хугацаанаас натураль логарифм авсан утгыг авч үздэг.

X санамсаргүй хэмжигдхүүнээс натураль логарифм авсан $Y = \ln X$ утга нь нормаль тархалттай бол X-г логнормаль тархалт гэдэг. Y санамсаргүй хэмжигдхүүний дундаж μ, дисперс σ^2 бол X-ийн нягтын функц

$$f(t) = \frac{e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma x}$$

хэлбэртэй байх бөгөөд энэ тархалтын дундаж, дисперс нь харгалзан $e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$, $e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2}$ байна. Энд үйлчилгээний хугацаанаас натураль логарифм авсан утга логнормаль тархалттай гэж авч үздэг. Энэ тархалтын дундаж, дисперсийг μ, σ гэж авсан гээд моментийн арга хэрэглэвэл,

$$\begin{cases} e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} = 97.78 \\ e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2} = 5895.53 \end{cases}$$

систем бодоход хүрэх бөгөөд энэ систем

$$\begin{cases} \mu + \frac{\sigma^2}{2} = 9.16544 \\ 2\mu + 2\sigma^2 = 9.64578 \end{cases}$$

систем рүү шилжинэ. Системийг бодвол, шийд нь

$$\mu = 4.3426,\ \sigma^2 = 0.4803$$

гэж олдоно. Иймд симулешны загварт бид дараах хоёр зүйлийг авч үзнэ. Үүнд

(1) Системд үйлчлүүлэгч ирэх хугацааны интервал $\lambda = 1/59.5$ дундаж бүхий илтгэгч тархалттай,
(2) Үйлчлүүлэх хугацаа $\mu = 4.3426$, $\sigma^2 = 0.4803$ өгөгдөл бүхий логнормаль тархалттай

болно.

Дээрх хоёр тархалтыг тодорхойлсон ч симулешн хийхийн тулд тодорхой өгөгдлүүд ашиглах шаардлага гарна. Үүний тулд авсан тархалтын хуульд захирагдах өгөгдлүүдийг санамсаргүйгээр байгуулдаг бөгөөд үүндээ $[0,1]$ завсар дахь санамсаргүй тоонуудыг ашигладаг.

Эхлээд $u \in [0,1]$ санамсаргүй тоо авч $t = F^{-1}(u)$ буюу $F(t) = u$ байх t санамсаргүй хувьсагч авбал,

$$\begin{aligned} P(t \le T) &= P(F^{-1}(u) \le T) \\ &= P(u \le F(T)) = F(T) \end{aligned}$$

болно.

$$t = F^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)$$

бөгөөд $u \in [0,1]$ санамсаргүй тоо учир $1-u$ мөн $[0,1]$ завсар дээрх санамсаргүй тоо болно. Иймд $(1-u)$-г дахин u гэж тэмдэглэвэл

$$t = -\frac{1}{\lambda}\ln(u) \tag{1.1}$$

хувьсагч илтгэгч тархалтад захирагдана.

Логнормаль тархалтад захирагдах X хувьсагчийн хувьд нормаль тархалттай Y хувьсагч авч $X = e^Y$ хувьсагчийг зохиоход хангалттай. Өөрөөр хэлбэл, логнормаль тархалттай санамсаргүй X хувьсагч тодорхойлохын тулд нормаль тархалтад захирагдах Y санамсаргүй тоо тодорхойлох хэрэгтэй. Нормаль тархалтын хувьд тархалтын функцыг интеграл хэлбэрээр олохоос өөрөөр олох боломжгүй учир $t = F^{-1}(u)$ тэгшитгэлийг u-с хамаарсан функц мэтээр авч чадахгүй. Иймд, дундаж нь 0, дисперс нь 1 байх стандарт нормаль тархалтын талбайн хүснэгт ашиглан $t = F^{-1}(u)$ байх t-ийн утгыг тодорхойлбол $N(0, 1)$ стандарт нормаль тархалтаар хувирах санамсаргүй тоонуудыг гаргаж авна.

Хэрэв, өмнө авсан t хувьсагчийн хувьд

$$s = \sigma t + m \tag{1.2}$$

шинэ хувьсагч тодорхойлбол, энэ нь $N(m, \sigma^2)$ нормаль тархалттай байна. Одоо e^s тоонуудыг авбал эдгээр нь логнормаль тархалттай болно.

Хүснэгтэд өмнө авсан жишээний хувьд үүсгэсэн санамсаргүй тоо болон тэдгээрт харгалзах хугацаануудыг олсныг үзүүлэв.

Хvснэгт 1.2.

No	Санам-саргүй тоо 1	Үйлчлүү-лэгч ирэх t-ны интервал	Үйлчлүү-лэгч ирэх цаг	Санам-саргүй тоо 2	$N(0,1)$	$N(4.345, 0.48)$	Үйлч-лүүлэх t
1	0.85	9.67	9.67	0.87	1.1264	5.1256	168.27
2	0.53	37.78	47.45	0.18	-0.9154	3.7106	40.88
3	0.83	11.09	58.53	0.15	-1.0364	3.6268	37.59
4	0.29	73.65	132.19	0.7	0.5244	4.7084	110.88
5	0.95	3.05	135.24	0.07	-1.4758	3.3223	27.72
6	0.56	34.5	169.74	0.37	-0.3319	4.115	61.25
7	0.27	77.91	247.64	0.79	0.8064	4.9038	134.81
8	0.09	143.27	390.91	0.49	-0.0251	4.3279	75.76
9	0.24	84.91	475.83	0.12	-1.1750	3.5307	34.15
10	0.43	50.22	526.04	0.38	-0.3055	4.1333	62.38
11	0.21	92.86	618.9	0.48	-0.0502	4.3102	74.46
12	0.78	14.78	633.69	0.13	-1.1264	3.5644	35.32
13	0.55	35.57	669.69	0.93	1.4758	5.3677	214.37
14	0.09	143.27	812.53	0.55	0.1257	4.4321	84.11
15	0.82	11.81	824.34	0.96	1.7507	5.5582	259.36
16	0.72	19.55	843.88	0.41	-0.2275	4.1873	65.85
17	0.61	29.41	873.29	0.02	-2.0538	2.9218	18.57
18	0.88	7.61	880.9	0.45	-0.1257	4.2579	70.66
19	0.73	18.73	899.63	0.71	0.5534	4.7285	113.12
20	0.11	131.33	1030.96	0.51	0.0251	4.3624	78.44

Хүснэгтийн өгөгдлийг үүсгэхдээ дараах дарааллыг баримтлана.

(1) Санамсаргүй тоо 1 болон (1.1) тэгшитгэлийг ашиглан 59.5 дундажтай илтгэгч тархалттай санамсаргүй хэмжигдхүүн үүсгэн түүнийгээ үйлчлүүлэгчийн системд ирэх хугацааны интервал болгон авна. Хугацааны интервалаа ашиглан үйчлүүлэгчийн системд ирэх цагийг тогтооно.

(2) Өмнө авсан санамсаргүй тоонуудаас ялгаатай санамсаргүй тоонуудыг жигд тархалтын хүснэгт ашиглан $N(0, 1)$-жигд тархалттай санамсаргүй тоонууд үүсгэнэ. Эдгээр тоонуудын хувьд (1.2) тэгшитгэл ашиглан дундаж нь 4.345, дисперс нь 0.48 байх жигт тархалттай санамсаргүй тоонууд гаргаж авна. Эдгээр тоонуудаа ашиглан $\exp(N(4.345, 0.48))$ утгыг авч үйлчлүүлэгчийн үйлчлүүлэх цагийг тогтооно.

Симулешн хийх явцад систем доторх хөдөлгөөнийг илэрхийлхийн тулд системийн төлөвийг илэрийлэх хувьсагч(төлөвийн хувьсагч) тодорхойлоод түүнийгээ ашиглан систем дэхь өөрчлөлтийг тооцдог. Энд авах симулешний хувьд систем байгаа хүний тоог төлөвийн хувьсагчаар авах нь тохиромжтой. систем дэхь хүний тооны хувьд системд үйлчлүүлэгч ирэх, системээс үйлчлүүлэгч явах тохиолдолд л өөрчлөлт орох учир эдгээр үзэгдэл илрэх цагийг тооцоолоод тооцоолцсон цагууддаа төлөвийн хувьсагчаа өөрчлөх нь зохимжтой.

1.2 хүснэгтэд гаргаж авсан тоон өгөгдлүүдээ ашиглан дахин шинэ хүснэгт зохиоё. Симулешн эхлэх 0.00 цагт систем хэн ч байхгүй. Үүний дараа системд үйлчлүүлэгч ирэх, системээс үйлчлүүлэгч явах тохиолдол болгонд системийн төлөвийн хувьсагчийг өөрчилж явна.

(1) Хамгийн эхний үзэгдэл бол 1-р үйлчлүүлэгч ирэх үзэгдэл бөгөөд энэ нь 9.67 секундэд илэрнэ. Иймд 9.67 секунд хүртэл яваад үүний дараа систем дэхь хүний тоог 1 болгож нэмэгдүүлнэ. Үүний зэрэгцээ тухайн үйлчлүүлэгчийн үйлчилчлүүлж эхлэх хугацаа, үйлчлүүлэх машин, хүлээх хугацааг тодорхойлох боломжтой. Эхний үйлчлүүлэгчийн хувьд систем ирэх хугацаа, үйлчлүүлж эхлэх хугацаа ижил, хоёр машин хоёулаа сул байгаа учир 1 дугаартай машинаар үйлчлүүлнэ. Уг үйлчлүүлэгчийн үйлчлүүлэх хугацаа мэдэгдэж байгаа учир үйлчилгээ дуусах хугацааг бас олж болно. Энэ үйлчлүүлэгчийн хувьд үйлчилгээ дуусах хугацаа 177.94 болно. 0 хугацаанаас 9.67 хугацаа хүртэл систем доторх хүний тоо 0 байгаа бөгөөд үүнийг системийн төлөв үргэлжлэх хугацаа гэж нэрлэнэ.

(2) Үйлчлүүлэгч 1-ийн системээс явах болон үйлчлүүлэгч 2-ийн системд ирэх үзэгдлийн аль түрүүлж илэрсэн нь дараагийн нь үзэгдэл болно. Үйлчлүүлэгч 1-ийг системээс явахаас өмнө 47.45 хугацаанд үйлчлүүлэгч 2 системд ирнэ. Иймд 47.45 хугацаа хүртэл системд 1 үйлчлүүлэгч байх бөгөөд үүнээс дараа систем дотор 2 хүн болж нэмэгдэнэ. Хоёрдахь үйлчлүүлэгчийн хувьд өмнөхтэй ижлээр үйлчлүүлж эхлэх хугацаа нь ирсэн хугацаатай давхцан бусад хугацаануудыг өмнөх үйлчлүүлэгчтэй адилаар тооцно.

(3) Дараагийн үзэгдэл нь 58.53 хугацаанд системд гуравдахь үйлчлүүлэгч ирэх үзэгдэл юм. 58.53 дахь хуагцаанаас эхлэн систем дэхь хүний тоо 3 болох бөгөөд энд хоёр машиныг хоёуланг нь ашиглаж байгаа учир гуравдахь үйлчлүүлэгч хүлээж эхэлнэ. Энэ үйлчлүүлэгчийг ирэхээс өмнө ирсэн үйлчлүүлэгчдин дотроос 1-р машинаар хамгийн сүүлд үйлчлүүлэх хүний үйлчлүүлж дуусах хугацаа 177.94, 2-р машинаар хамгийн сүүлд үйлчлүүлэх хүний үйлчлүүлж дуусах хугацаа 88.33 учир гуравдахь үйлчлүүлэгч 88.33 дахь хугацаанаас эхлэн 2-р машинаар үйлчлүүлж эхэлнэ. Хүлээх хугацаа нь $88.33 - 58.53 = 29.8$ бөгөөд эдгээрээс гадна үйлчилгээ дуусах хугацаа, төлөв үргэлжлэх хугацаа зэргийг тооцоолно.

(4) Үүний дараагийн үзэгдэл бол 88.33 дахь хугацаанд үйлчилгээ нь дуусах үйлчлүүлэгч системээс явах үзэгдэл бөгөөд энэ хугацаанаас систем дэхь хүний тоо 3-с 2 болж буурна.