Магадлалын үндсэн чанарууд

(1) **Үржвэр болон нийлбэр үзэгдэл.** Нийт үзэгдлийн огторгуй U-ийн A, B хоёр үзэгдлийн хувьд "A ба B үзэгдлүүд хоёул хамт илрэх"үзэгдлийг A ба B-ийн **үржвэр үзэгдэл** гээд $A \cap B$ гэж тэмдэглэнэ.

"A ба B үзэгдлүүдийн аль илрэх"үзэгдлийг A ба B-ийн **нийлбэр үзэгдэл** гээд $A \cup B$ гэж тэмдэглэнэ.

Жишээ 1. Шоо орхих туршилт хийе. A-р сондгой тоогоор унах үзэгдлийг, B-р 4 ба түүнээс их тоогоор унах үзэгдлийг тэмдэглэвэл $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ болно.

$A \cap B$: нь сондгой бөгөөд 4-с их тоотой нүдээр унах үзэгдэл болно. Энэ нь $A \cap B = \{5\}$ юм.

$A \cup B$: нь сондгой эсвэл 4-с их тоотой нүдээр унах үзэгдэл болно. Энэ нь $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ юм.

(2) **Харилцан нийцгүй үзэгдэл.** Тухайн туршилтын хувьд A ба B үзэгдлүүд нэг зэрэг илрэх боломжгүй бол эдгээрийг **харилцан нийцгүй үзэгдэл** гэж нэрлэнэ.

Үүнийг $A \cap B = \emptyset$ гэж тэмдэглэж болно. Гурав ба түүнээс олон үзэгдлийн хувьд эдгээрийн аль ч хоёр үзэгдэл хоорондоо харилцан нийцгүй бол эдгээрийг харилцан нийцгүй үзэгдлүүд гэнэ.

Жишээ 2. Шоо орхих туршилтаа дахин авч үзье. E : тэгш тоотой нүдээр унах үзэгдэл. F : 3 нүдээрээ унах үзэгдэл гэвэл $E = \{2, 4, 6\}$, $F = \{3\}$ болох учир $E \cap F = \emptyset$ болно. Иймд эдгээр нь харилцан нийцгүй үзэгдлүүд болно.

(3) **Магадлалын үндсэн чанар.** Нийт үзэгдлийн огторгуй U, хоосон үзэгдэл $\emptyset$ мөн A үзэгдлийн боломжийн тооны хувьд

$$0 \leq n(A) \leq n(U) \text{ энд } n(\emptyset) = 0, n(U) = N$$

болно. Тэнцэтгэл бишийн талуудыг $n(U)$-д хуваавал

$$0 \leq P(A) \leq 1, \text{ тухайлан } P(\emptyset) = 0, P(U) = 1 \tag{0.0.1}$$

болно. $A \cup B$ болон $A \cap B$ үзэгдлүүдийн хувьд

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

болох ба тэнцэтгэлийн хоёр талыг $n(U) = N$-д хуваавал

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

биелэнэ.

A, B үзэгдлүүд харилцан нийцгүй буюу $A \cap B = \emptyset$ бол $P(A \cap B) = 0$ болох учир

A, B үзэгдлүүд харилцан нийцгүй үзэгдлүүд бол

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

байна.

Жишээ 3. 52 ширхэг хөзөрнөөс санамсаргүй 1 ширхэгийг авахад тамга байх үзэгдэлийг A, ноён байх үзэгдэлийг B гэе. A, B үзэгдлүүд харилцан нийцгүй үегдлүүд учир $A \cup B$ үзэгдлийн магадлал

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{2}{12}$$

болно.

(4) A үзэгдэл өгсөн үед "A үзэгдэл илрэхгүй"гэдэг үзэгдлийг A үзэгдлийн **гүйцээлт** гэж нэрлээд $\overline{A}$ гэж тэмдэглэнэ. $A \cap \overline{A} = \emptyset$ учир $P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(B)$ болох ба $A \cup \overline{A} = U$, $P(U) = 1$ учир

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

байна. $\overline{A}$ үзэгдлийн магадлалыг олбол

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

болно.

Жишээ 4. 2 ширхэг шоо орхих туршилтаар ижил тоотой нүдээр буух үзэгдлийг A гэвэл ялгаатай нүдээр буух үзэгдэл $\overline{A}$ болно.

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{6}{6^2} = \frac{5}{6}$$

болно.

Жишээ 5. Утанд 6 улаан, 4 цагаан бөмбөг байв. Уутнаас санамсаргүйгээр, нэгэн зэрэг 3 бөмбөг авахад улаан, цагаан бөмбөг аль аль нь байх магадлалыг ол.

Бодолт. 10 бөмбөгнөөс 3 бөмбөг авах боломж нь C_{10}^3 байна.
$A : 1$ улаан, 2 цагаан бөмбөг байх, $B : 2$ улаан, 1 цагаан бөмбөг байх үзэгдлүүдийг тэмдэглэе.
Эдгээр нь нийцгүй үзэгдлүүд ба
A үзэгдлийн боломж $C_6^1 \times C_4^2 = 6 \times 6 = 36$,
B үзэгдлийн боломж $C_6^2 \times C_4^1 = 15 \times 4 = 60$ болох учир

$$P(A \cup A) = P(A) + P(B) = \frac{36}{120} + \frac{60}{120} = \frac{96}{120} = \frac{4}{5}$$

Бодлого 1. 3 хонжвортой 10 сугалаа байв. Сугалаанаас нэг зэрэг 3-г авахад 2-с илүү тохиролтой байх магадлалыг ол.

Бодлого 2. A уутанд 6 улаан, 4 цагаан бөмбөг, B уутанд 4 улаан, 6 цагаан бөмбөг байв. Уут тус бүрээс санамсаргүйгээр, нэгэн зэрэг 2 бөмбөг авахад дараах асуултад хариул.
(1) Бүх бөмбөг ижил өнгөтэй байх магадлал хэд вэ? (2) Улаан 2, цагаан 2 бөмбөг байх магадлалыг ол.

Жишээ 6 (Нийлбэр үзэгдлийн магадлал). P цэг xy-хавтгайд координатын эхээс эхлэн дараах дүрмээр хөдөлнө.

Шоо орхин тэгш тоотой нүдээр унавал x-тэнхлэгийн эерэг чиглэлийн дагуу 1 нэгж явна. Сондгой тоотой нүдээр унавал y-тэнхлэгийн эерэг чиглэлийн дагуу 1 нэгж явна. Шоог 6 удаа орхих үед дараах үзэгдлийн магадлалыг ол.

(1) P цэг $(3, 3)$ цэгт очих
(2) P цэг $(1, 2)$ эсвэл $(2, 3)$ цэгийг дайрах

Бодолт. Шоог 6 удаа орхиход P цэг хөдлөх боломжийн тоо $2^6 = 64$ болно.
(1) Дээшээ болон хажуу тийш явах замыг харгалзан Д, Х гэж тэмдэглэвэл $(3, 3)$ цэгт хүрэх замын боломжууд нь Д, Д, Д, Х, Х, Х үсэгнүүдийг хэдэн янзаар сэлгэх вэ гэдэгтэй ижил ба эдгээрийн боломж C_6^3 болно. Иймд олох ёстой магадлал $20/64 = 5/16$ байна.

(2) $(1,2)$ цэгийг дайрах боломж $C_3^1 \times 2^3$ болох учир магадлал $C_3^1 \times 2^3/64 = 3/8$ болно.

$(2,3)$ цэгийг дайрах боломж $C_5^2 \times 2$ болох учир магадлал $C_5^2 \times 2/64 = 5/16$ болно.

$(1,2)$ ба $(2,3)$ цэгүүдийг хоёуланг дайрах боломж $C_3^1 \times C_2^1 \times 2$ болох учир магадлал $C_3^1 \times C_2^1 \times 2/64 = 3/16$ болно.

Иймд олох ёстой магадлал

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{5}{16} - \frac{3}{16} = \frac{1}{2}$$

болно.

Бодлого 3. $1-9$ хүртэл тоо бичсэн карт тус бүр 3, нийт 27 карт байв. Санамсаргүйгээр 2 карт сонгож авав. Дараах магадлалыг ол.

(1) Ижил тоо бичсэн 2 карт байх магадлал,
(2) Ижил тоо бичсэн 2 карт байх бөгөөд 2 карт дээрх тооны нийлбэр 5-с бага байх магадлал

Бодлого 4. 1000-9999 хүртлэх 4 оронтой тоонуудаас санамсаргүйгээр 1 тоо сонгож авав. Нэг цифр 2-с олон удаа давтагдсан байх магадлалыг ол. Заавар: цифр давтагдаагүй байх магадлалыг ол.

Бодлого 5. Санамсаргүйгээр сонгож авсан 3 хүн дотор төрсөн өдөр нь ижил хүмүүс байх магадлалыг ол.

Бодлого 6. Шоог 3 удаа орхижээ. Буусан нүдний тоог хооронд нь үржүүлж гарсан тоог X гэе. Дараах магадлалыг ол.

(1) $X > 2$ байх магадлал,
(2) X 5-д хуваагдах магадлал

Бодлого 7. 1-с 10 хүртлэх тоонуудаас санамсаргүйгээр 3 тоог дараалан сонгож зүүн гар тийш зэрэгцүүлэн бичив.

(1) 2 дахь цифр нь 2 эсвэл 3 дахь цифр нь 3 байх магадлалыг ол.
(2) 2 дахь цифр нь 2 биш, 3 дахь цифр нь 3 биш байх магадлалыг ол.

Заавар: 2 дахь цифр нь 2 байх үзэгдлийг A, 3 дахь цифр нь 3 байх үзэгдлийг B гэвэл
(1) нь $P(A \cup B)$, (2) нь $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ болно.

Бодлого 8. 1-с 200 хүртлэх натурал тоонуудыг нэг нэгээр нь бичсэн 2 ширхэг сугалаа байв. Эдгээрээс санамсаргүйгээр нэгийг сонгон авахад энэ нь 2-т хуваагдахгүй, 3-т хуваагдахгүй тоо байх магадлалыг ол.

A, B үзэгдлүүдийн зөвхөн нэг нь илрэх үзэгдлийг $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$ үзэгдлүүдээр илэрхийлдэг. $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$ үзэгдлүүд харилцан нийцгүй үзэгдлүүд юм. Иймд

$$\begin{aligned} P(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) &= P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \end{aligned}$$

томьёо биелэнэ.

Бодлого 9. 2 ширхэг шоог зэрэг орхижээ. Дор хаяж нэг шоо нь 1 тоотой нүдээрээ унах үзэгдлийг A, унасан нүднүүдийн нийлбэр сондгой тоо байх үзэгдлийг B гэе. Дараах үзэгдлүүдийн магадлалыг ол.

(1) (1) A (2) $A \cap B$ (3) $A \cup B$ (4) $A \cap \overline{B}$ (5) $\overline{A} \cap B$
(2) A, B үзэгдлүүдийн зөвхөн нэг нь илрэх үзэгдлийн магадлалыг ол.

Бодлого 10. Сурагчийн бодолтыг доор сийрүүлэв. Сурагчийн бодолт зөв эсэхийг хэлнэ үү. Хэрэв буруу байвал шалтгааныг хэлнэ үү. "Шоог орхиход 1 тоотой нүдээр унах магадлал 1/6. Иймд шоог 6 удаа орхиход 1 нүдээрээ хамгийн багадаа 1 удаа унах үзэгдлийн магадлал

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$$

байна."