Үл хамаарах туршилтын магадлал

Үл хамаарах туршилт. Хоёр туршилтын хувьд нэг туршилтын үр дүн нөгөө туршилтын үр дүнд нөлөөлөхгүй байвал эдгээрийг **үл хамаарах** гэнэ. Гурав ба түүнээс дээш туршилтын хувьд аль ч туршилтын үр дүн бусад туршилтын үр дүнд нөлөөлөхгүй бол эдгээрийг үл хамаарах туршилтууд гэнэ.

Үл хамаарах T_1, T_2 туршилтуудыг нэг зэрэг эсвэл дараалан хийсэн туршилтыг **үл хамаарах туршилт** гэж нэрлэнэ.

Жишээ 1. (1) 1 ширхэг шоог орхих, 2 ширхэг зоосыг орхих туршилтууд нь үл хамаарах туршилтууд юм.

(2) Уутанд 6 ширхэг улаан, 4 ширхэг цагаан бөмбөг байв. Нэг ширхэг бөмбөг санамсаргүйгээр авах үзэгдлийг S, дахин нэг бөмбөг авах үзэгдлийг T гэе. Хэрэв

   (a) Анхны туршилтаар авсан бөмбөгийг уутанд буцааж хийсэн бол S ба T туршилтууд **үл хамаарах** туршилт болно.

   (b) Анхны туршилтаар авсан бөмбөгийг уутанд буцааж хийхгүй бол S ба T туршилтууд **үл хамаарах биш** туршилт болно.

   (a)-д авч буй түүврийг **буцаалтгүй түүвэр**, (b)-д авч буйг **буцаалттай** түүвэр гэнэ.

Үл хамаарах туршилтын магадлал. Үл хамаарах T_1, T_2 туршилтуудыг хамтатгасан туршилтыг T гэе. T_1 туршилтаар A үзэгдэл, T_2 туршилтаар B үзэгдэл илрэх үзэгдлийг C гэвэл

$$P(C) = P(A) \cdot P(B)$$

байна.

T_i, $i = 1, 2$ туршилтын бүх үзэгдлийн огторгуйг U_i гээд T_1, T_2 туршилтыг нэгтгэсэн T туршилтын нийт үзэгдлийн огторгуй U-г олоход хялбархан. $C = A \times B$ энд $A \in U_1$, $B \in U_2$ ба $C \in U$ гэвэл

$$P(C) = \frac{n(A \times B)}{n(U_1 \times U_2)} = \frac{n(A) \cdot n(B)}{n(U_1) \cdot n(U_2)} = P(A) \cdot P(B)$$

болно. Гурав ба түүнээс олон үл хамаарах туршилтын хувьд үүнтэй төстэй томьёог гаргаж болно.

Жишээ 2. (1) Шоог хоёр удаа орхижээ. Эхний удаад 2-с цөөн тоотой нүдээр, хоёрдахь удаа орхиход 3-с дээш тоотой нүдээр унах үзэгдлийн магадлалыг ол.

(2) A, B 2 хүн хайч, чулуу, даавуу тоглоом тоглож байв. A нь хайч, чулуу, даавууг ижил магадлалатай гаргадаг. B нь 6 удаад 3 удаа хайч, 2 удаа чулуу, 1 удаа даавуу гаргадаг. 1 удаа тоглоход В хожих магадлал хэд вэ?

Бодолт. (1) Шоог эхний удаад орхих туршилтыг T_1, хоёрдахь удаад орхих туршилтыг T_2 гэвэл эдгээр нь үл хамаарах туршилтууд болох ба эхний удаад 2-с цөөн тоотой нүдээр унах үзэгдлийг A, хоёрдахь удаа орхиход 3-с дээш тоотой нүдээр унах үзэгдлийг B гэе. $P(A) = 2/6 = 1/3$, $P(B) = 4/6 = 2/3$ учир $P(C) = P(A) \cdot P(B) = 2/9$ болно.

(2) В, А тоглогч ямар дүрс гаргах нь үл хамаарах туршилтууд болно. В тоглогч хайч, чулуу, даавуу гаргах үзэгдлийн магадлал харгалзан

3/6 = 1/2, 2/6 = 1/3, 1/6 болно. (B,A) хослол (Х, Д), (Д, Ч), (Ч,Х) хэлбэрээр гаргавал B хожно. Эдгээр үзэгдлийн магадлал

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

болно.

Нийцгүй үзэгдэл болон үл хамаарах туршилтыг хооронд нь андуурах, ялгахгүй байх хүмүүс байдаг.

A, B үзэгдлүүд нийцгүй байхын тулд A, B үзэгдлүүд нэг дор илрэхгүй ($A \cap B = \emptyset$).
S, T туршилтууд үл хамаарах байхын тулд S, T-ийн үр дүнгүүд хоорондоо хамааралгүй байдаг.

Бодлого 1. (1) Шоог гурван удаа орхиход эхний удаад 1 тоотой нүдээр унах, хоёрдахь удаад 2 ба 3 тоотой нүдээр унах, гуравдахь удаад 4-с дээш тоотой нүдээр унах магадлалыг ол.
(2) A, B 2 хүн хайч, чулуу, даавуу тоглоом тоглож байв. Хоёр тоглогч тус бүр 6 удаад 3 удаа хайч, 2 удаа чулуу, 1 удаа даавуу гаргадаг. 1 удаа тоглоход A хожих магадлал хэд вэ? Хэн ч хожихгүй байх магадлал хэд вэ?

Бодлого 2. A, B, C гурван нум сум харваач харваад онох магадлал харгалзан 1/2, 1/3, 1/4 байв. Эдгээр харваач тус тусдаа харвасан тохиолдолд дор хаяж 1 хүн онох магадлал хэд вэ?

Бодлого 3. Сурагч A, B, C гурван дээд сургуульд элсэлтийн шалгалт өгчээ. Сургуулийн шалгалтанд тэнцэх магадлал харгалзан 0.75, 0.6, 0.4 байв.
(1) A,B сургуульд тэнцээд, C сургуульд тэнцэхгүй байх магадлал хэд вэ?
(2) Гурван сургуулийн дор хаяж нэгд нь тэнцэх магадлал хэд вэ?

Нөхцөлт магадлал

3 тохирол бүхий 10 ширхэг сугалаа байв. Эдгээрээс нэг нэгээр дараалуулан 2 сугалаа авчээ. Эхний сугалаа тохиролтой байх үзэгдлийг A, 2 дахь сугалаа тохиролтой байх үзэгдлийг B гэе.

A үзэгдэл илэрсэн гэе. Тэгвэл тохиролтой 2 сугалааг агуулсан 9 сугалаа үлдсэн. Энэ тохиолдолд 2 дахь сугалаа хонжвортой байх үзэгдэл буюу B үзэгдэл илрэх магадлал 2/9 болно. Энэхүү

A үзэгдэл илрэх нөхцөлд B үзэгдэл илрэх магадлалыг

A үзэгдэл илэрсэн үед B үзэгдэл илрэх **нөхцөлт магадлал** гэж нэрлэн $P_A(B)$ гэж тэмдэглэдэг.

Магадлалыг үржих дүрэм. U нийт үзэгдлийн огторгуйн A, B үзэгдлүүдийн хувьд $A\cap B$, $A\cap\overline{B}$, $\overline{A}\cap B$, $\overline{A}\cap\overline{B}$ хэлбэрийн огтлолцолууд үүсэх боломжтой. A үзэгдэл илрэх тохиолдолд энэ нь $A \cap B$, $A\cap\overline{B}$ үзэгдлүүдтэй хамааралтай ба $\overline{U} = \{A\cap B, A\cap\overline{B}\}$ гэвэл A үзэгдэл илэрсэн тохиолдолд B үзэгдэл илрэх нөхцөлт магадлал нь

$$P_A(B)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

болно ($(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A$).

Тэнцэтгэлийн баруун гар талын харьцаа тус бүрийг $n(U)$-д хуваавал

$$\frac{n(A\cap B)}{n(U)} = P(A\cap B), \quad \frac{n(A)}{n(U)} = P(A)$$

болох тул

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

болно. Эндээс

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P_A(B)$$

болно. Үүнийг **магадлалын үржих томьёо** гэж нэрлэдэг.

Жишээ 3. Уутанд улаан бөмбөг 3, цагаан бөмбөг 7 ширхэг байв. Уутнаас буцаалтгүй түүврээр 2 бөмбөг авчээ. Эхний бөмбөг цагаан байх үзэгдлийг A, 2 дахь бөмбөг улаан байх үзэгдийг B гэе. Энэ тохиолдолд

$$P(A) = \frac{7}{10} \text{ ба } P_A(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

учир $A\cap B$ буюу эхний бөмбөг цагаан, хоёрдахь бөмбөг улаан байх үзэгдлийн магадлал

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P_A(B) = \frac{7}{10}\cdot\frac{1}{3} = \frac{7}{30}$$

болно.

Жишээ 4. 3 тохирол бүхий 10 ширхэг сугалаа байв. Эдгээрээс нэг нэгээр дараалуулан 2 сугалаа авчээ. Эхний сугалаа авах үзэгдлийг A, хоёрдахь сугалаа авах үзэгдлийг B гэе. Дараах үзэгдлийн магадлалыг ол.
(1) A хонжвортой, B хонжвортой байх, (2) B хонжвортой байх магадлалыг ол.

Бодолт. (1) $P(A) = 3/10$ ба $P_A(B) = 2/9$ учир үржвэрийн дүрэмээр $P(A\cap B) = P(A\cdot P_A(B)) = 1/15$ болно. Мөн үүнийг өөрөөр бодвол, A, B үзэгдлүүд илрэх магадлал нь $P_3^2/P_{10}^2 = \dfrac{2\cdot 3}{9\cdot 10} = \dfrac{1}{15}$ болно.
(2) B үзэгдэл дараах 2 тохиолдолд илэрнэ.
(1) A тохиролтой, B тохиролгүй, (2) A тохиролгүй, B тохиролтой.

Эдгээрийн эхний тохиолдлын магадлалыг олсон. Хоёрдахь үзэгдлийн хувьд $\dfrac{7}{10}\cdot\dfrac{3}{9} = \dfrac{7}{30}$ болно. Иймд нийт үзэгдлийн магадлал

$$P = \frac{1}{15} + \frac{7}{30} = \frac{3}{10}$$

болно.

Бодлого 4. 5 тохирол бүхий 15 ширхэг сугалаа байв. Эдгээрээс нэг нэгээр дараалуулан 2 сугалаа авчээ. Эхний сугалаа авах үзэгдлийг A, хоёрдахь сугалаа авах үзэгдлийг B гэе. Дараах үзэгдлийн магадлалыг ол.
(1) A, B хоёул хонжворгүй байх, (2) A хонжвортой, B хонжворгүй байх магадлалыг ол.

Бодлого 5. Эхний уутанд 6 цагаан, 3 улаан бөмбөг, хоёрдахь уутанд 3 цагаан, 4 улаан бөмбөг байв. Эхний уутнаас 1 бөмбөг авч хоёрдахь уутанд хийн тэндээс хоёр бөмбөг авахад 2 бөмбөг цагаан байх магадлалыг ол (5/28).

Бодлого 6. Уутанд 7 цагаан, 3 улаан бөмбөг байв. А хүн эхлээд уутнаас 2 бөмбөг нэгэн зэрэг гаргана. Эдгээр бөмбөгийг буцаалгүй В уутнаас 2 бөмбөг зэрэг авна.

(1) А-ийн авсан бөмбөг хоёул улаан байх магадлал,
(2) А-ийн авсан бөмбөг хоёул цагаан байх магадлал болон хоёр бөмбөг улаан ба цагаан байх магадлалыг ол.
(3) В-ийн авсан бөмбөг хоёулаа улаан байх магадлалыг ол.

Бодлого 7.

Бодлого 8.