Тойрог, дугуй ширээнд суух боломж тоолох

Юмыг тойрог/дугуй хэлбэрээр байрлуулахыг тойрог эсвэл дугуйн дагуух сэлгэмэл гэж нэрлэдэг. Тойргийн дагуух сэлгэмэлийн хувьд эргүүлэлтээр давхцах сэлгэмэлийг хоорондоо адилхан гэж үздэгээр ердийн сэлгэмэлээс ялгаатай. Жишээ нь ялгаатай 5 элементийг дугуй хэлбэртэй байрлуулбал доорх зурагт өгсөн сэлгэмэлүүдийг ижил гэж тооцно. Дугуйн дагуух сэлгэмэлийн хувьд дараах хоёр үндсэн аргыг хэрэглэдэг.

(1) Ердийн сэлгэмэл мэтээр тооцоод адилхан элементүүдийн тоо буюу давхцлын тоонд хуваана.

(2) Нэг элементийг бэхлээд бусад элементийн сэлгэмэлийг авч үзнэ.

Ялгаатай n ширхэг зүйлийг тойргийн дагуу байрлуулах боломж $(n-1)!$ байна. Учир нь n элементийн нэгийг бэхлэн ердийн сэлгэмэл шигээр тооцвол $n!$ болох ба эдгээр нь n удаа давхцаж байгаа учир n-д хуваана.

Буцаалттай түүвэр

Ялгаатай n ширхэг зүйлсээс давхцал тооцон r зүйлийг сонгох үйлдлийг буцаалттай түүвэр гэж нэрлэдэг. Энэ түүврийн хувьд 1-р элемент, 2-р элемент гэх мэт r-р элемент бүгдийг n боломжоор сонгох учир нийт боломжийн тоо n^r болно. Буцаалттай түүврийн хувьд $n < r$ байж болно.

Бодлого 1. Ялгаатай 6 ширхэг үнэт чулууг тойргийн дагуу хэдэн янзаар байрлуулах вэ? Эдгээрийг ашиглан зүүлт хийсэн бол хэдэн янзаар хэлхэх боломжтой вэ?

Бодлого 2. 4 хүүхэд хайч, чулуу, даавуу хэмээх тоглоом тоглов. Нийт хэдэн боломж байх вэ?

Бодлого 3. Кубын талс бүр дээр 1-с 6 хүртлэх тоо бичин шоо хийжээ. Хэдэн янзаар шоог хийх боломжтой вэ? Зэргэлдээ 2 талсын тооны нийлбэр 7 байх хэдэн боломжтой вэ?

Бодолт. Шоог эргүүлэхэд давхцаж байх байрлалыг хоорондоо ижил гэж тооцно. Өмнө тэмдэглэсэнээр 1 элементийг бэхлэх шаардлагатай учир шооны дээд талын тоог 1 гэж бэхлэн бусад элементүүдийн сэлгэмэлийг тооцъё. Шооны доод талын тоо нь 1-с бусад 5 тоо байх боломжтой ба үлдсэн 4 тооны хувьд байрлалын боломжийн тоо $(4-1)!$ байна. Иймд шоон дээр тоог байрлуулах боломжийн тоо $5 \cdot (4-1)! = 30$ болно.

Шооны дээд талын тоог 1 гэвэл түүний эсрэг талс дээр 6 байна. Хажуу талсуудын хувьд 3, 2, 4, 5 эсвэл 4,2,3,5 байх боломжтой. Иймд нийт боломжийн тоо 2 байна.

Бодлого 4. 2 багш, 4 оюутан дугуй ширээнд суужээ. Дараах асуултуудад хариул.

(1) Нийт хэдэн боломжоор суух вэ?
(2) Хоёр багш өөд өөдөөсөө харж суух хэдэн боломж байгаа вэ?
(3) Хоёр багш зэрэгцэж суух хэдэн боломж байгаа вэ?

Бодлого 5. Эрэгтэй 4, эмэгтэй 4 оюутан гараа барилцан тойрог хэлбэрээр зогсжээ. Дараах асуултуудад хариул.

(1) Эрэгтэй 4 оюутан зэрэгцэж зогсох хэдэн боломж байгаа вэ?
(2) Эрэгтэй, эмэгтэй оюутан алгасан зогсох нийт хэдэн боломж байгаа вэ?

Бодлого 6. 8 ширхэг эрдэнийн чулууг хэлхэн зүүлт хийжээ. Дараах асуултуудад хариул.

(1) Зүүлт хийх хэдэн боломж байгаа вэ?
(2) Тусгайлсан a, b хоёр чулууг нэг дор хэлхэх хэдэн боломж байгаа вэ?

Бодлого 7. 1-с 5 хүртэл дугаарласан хайрцаг байв. Дараах боломжуудыг ол.

(1) Улаан, цагаан бөмбөгнөөс аль нэгийг сонгон авч хайрцаг болгонд нэгийг хийх ба өнгө болгоноос дор хаяж нэг өнгө орсон байх боломжийн тоо.
(2) Улаан, цагаан, хөх бөмбөгнөөс аль нэгийг сонгон авч хайрцаг болгонд нэгийг хийх ба өнгө болгоноос дор хаяж нэг өнгө орсон байх боломжийн тоо.

Бодолт. (1) Нэг хайрцганд нэг бөмбөг хийх боломж нь улаан, цагаан бөмбөгнөөс аль нэгийг сонгон авч хийх учир 2 байх ба нийт 5 хайрцганд хийх учир 2^5 боломжтой. Эдгээрээс бүгд ижил буюу таван улаан, таван цагаан бөмбөгтэй байх хоёр тохиолдлыг давхардуулж тоолсон учир хасах шаардлагатай. Иймд нийт боломжийн тоо $2^5 - 2 = 30$ болно.

(2) Улаан, цагаан, хөх бөмбөгнөөс нэгийг сонгон авч хайрцаг болгонд нэгийг хийх боломж 3 ба нийт таван хайрцганд хийх боломж 3^5 болно. Эдгээрээс хайрцганд байгаа бөмбөг бүгд ижил өнгөтэй 3 тохиолдолд, зөвхөн хоёр өнгөтэй байх $30 \cdot 3 = 90$ тохиолдлыг хасаж тооцох ёстой. Иймд нийт боломж

$$3^5 - 3 - 90 = 150$$

болно.

Бодлого 8. Дараах гурван цифрийг ашиглан 3-с цөөн оронтой тоо хэдийг зохиож болох вэ? Цифр давтагдаж болно.
(1) 1, 2, 3, 4 (2) 0, 1, 2, 3

Бодлого 9. Таван элементтэй олонлогийн бүх дэд олонлогийн тоо хэд вэ?

Бодлого 10. 1, 2, 3 цифр бичсэн цаас тус бүр 2 ширхэг нийт 6 ширхэг байв. Ижил цифр бичсэн хоёр цаасыг хооронд нь ялгахгүй.

(1) 6 цааснаас санамсаргүйгээр 3-г сонгон авч цувруулан байрлуулах боломжийн тоо хэд вэ?
(2) Ингэж байрлуулахад өмнөх цифр дараагийн цифрээсээ ихгүй байх боломжийн тоо хэд вэ?

Бодлого 11. Таван өнгийн будаг ашиглан зурагт үзүүлсэн A, B, C, D, E хэсгүүдийг будав.

(1) Нэг өнгийг хэдэн удаа ашигласан ч болох ба хиллэж байгаа хэсгүүдийн өнгө ялгаатай байх будалтын боломж хэд вэ?
(2) Хэсгүүдийн нэрийг ялгахгүйгээр будах үед 5 өнгийг бүгдийг ашиглан будах боломжийн тоо хэд вэ?

Бодолт. Хэсгүүдийг ялгаатай өнгөөр будах учир C ба E эсвэл D ба B хэсгүүдийг өөр өнгөөр будаж болно. Иймд 5-с цөөн өнгө ашиглан будах боломжтой. Үүнийг ашиглая.

(1) (a) 5 өнгө ашигласан гэвэл боломжийн тоо $5! = 120$ байна.
(b) 4 өнгө ашиглах үед C ба E эсвэл D ба B хэсгүүдийн аль нэг ижил өнгөтэй байх үед бодлогын нөхцлийг хангасан будалт хийх учир нийт боломж

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 240$$

болно.
(c) 3 өнгө ашигласан үед C ба E ижил өнгөтэй, D ба B хэсгүүд үлдсэн 4 өнгөний аль нэгээс ижил өнгөтэй байх үед бодлогын нөхцлийг хангасан будалт хийх учир нийт боломж

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

болно.

Иймд нийт боломжийн тоо $120 + 240 + 60 = 420$ болно.

(2) Төвийн квадратын өнгийг бэхэлсэн гэе. Тэгвэл үлдсэн дөрвөн хэсгийг будах будалтын тоог тойргоор байрлуулах боломжтой ижил учир $(4-1)! = 6$ байна. Төвийн хэсгийн будалтын боломж нийт 5 учир бодлогын нөхцлийг хангах боломжийн тоо $5 \cdot 6 = 30$ болно.

Бодлого 12. (1) Кубын талсууд дээр $1-6$ хүртлэх цифрүүдийг бичжээ. Мөн эдгээрийг цагаан, улаан өнгийн аль нэгээр будах болов. Нийт хичнээн янзаар будах боломжтой вэ?

(2) Талсууд дээр тоо бичээгүй тохиолдолд нийт хичнээн янзаар будах боломжтой вэ? Заавар: Цагаан, улаан өнгөөр будагдсан талсын тоог (цагаан, улаан)= (x, y) гэж бичин (x, y) хосын боломжийг тоолох нь тохиромжтой.

(3) (2)-той ижил үед цагаан, улаан, шар өнгөөр будах үед нийт хичнээн янзаар будах боломжтой вэ?

Бодлого 13. $1-10$ хүртлэх тоонуудыг цувруулан бичжээ. Дараах нөхцлийг хангах нийт хичнээн боломжбайх вэ?

(1) $1 \leq i \leq 9$ үед i-рх тоо $\geq i$ байх (2) 10 дугаарх тоо ≤ 10 байх.

Бодлого 14. (1) n, $n \geq 2$ тооны хүнийг A, B хоёр өрөөнд хичнээн янзаар хуваарилж болох вэ? Нэг өрөөнд бүх хүнийг оруулж болно.

(2) n, $n \geq 2$ тооны хүнийг 2 олонлогт хуваах нийт хэдэн боломж байх вэ?

Бодолт. (1) Хүн тус бүрээр авч үзвэл A, B өрөөний аль нэгэнд орох боломжтой учир 2^n янзаар хуваарилж болно.

(2) n хүнийг олонлогт хуваарилахад өмнөх бодлогоос ялгаатай нь хуваарилагдаж буй олонлогийг ялгаагүй учир давхцал гарах ба бүх хүн нэг өрөөнд хуваарилагдах боломж давхар тоологдсон. Эдгээрийг тооцвол $(2^n - 2)/2 = 2^{n-1} - 1$ боломжтой.

Бодлого 15. (1) 8 хүнийг A, B, C гурван өрөөнд хэдэн янзаар хуваарилж болох вэ? Өрөө хоосон байж болно.

(2) 8 хүнийг A, B, C гурван бүлэгт хэдэн янзаар хуваарилж болох вэ?

(3) 8 хүнийг гурван бүлэгт хэдэн янзаар хуваарилж болох вэ?

Хэсэглэл

Тодорхойлолт 1. Ялгаатай n ширхэг зүйлээс эрэмбэ харгалзалгүйгээр ялгаатай r ширхэг элементийг ялган авч нэг олонлог болгохыг n элементээс r элементийг сонгон авах **хэсэглэл** гэж нэрлэн C_n^r эсвэл $\binom{n}{r}$.

Түүвэрлэн авсан r элементийг эрэмбэлэх боломж нь $r!$ ба эдгээрийн боломжийн нийт тоо нь n элементээс r элементийг эрэмбэтэйгээр сонгон авах нийт боломж буюу P_n^r болно. Иймд $= C_n^r \cdot r!$ нөхцөл биелэнэ. Иймд $C_n^r = \dfrac{P_n^r}{r!} = \dfrac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$ байна. $0! = 1$ гэдгийг ашиглавал $C_n 0 = 1$ байна.

Хэсэглэлийн чанар

(1) $C_n^r = C_n^{n-r}$ (2) $C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r$, $1 \leq r \leq n$

0.1. Ижил элементийг агуулсан олонлогоос түүвэр авах

Өмнө бид тоолохдоо ижил элемент агуулаагүй олонлогоос элемент түүвэрлэх тухай үзсэн. Одоо сонгож авах элементүүд дотор ижил элементүүд байгаа тохиолдлыг авч үзье.

Үүнийг шийдэхэд 2 арга хэрэглэдэг.

(1) Ижил элементүүдийн байршлыг тооцох(сэлгэмэл ашиглах)

(2) P_n^r-г давхардлын тоонд хуваах.

Жишээ нь a элемент 4 ширхэг, b элемент 3 ширхэг, c элемент 2 ширхэг байсан бол эдгээр 9 элементээс зохиож болох үгийн тоог олъё.

Эхлээд (1)-р аргыг хэрэглэвэл 4 ширхэг a элементийг байрлуулах боломж C_9^4, 3 ширхэг b элементийг үлдсэн 5 байрлалд байрлуулах боломжтой учир C_5^3 боломжтой, үлдсэн хоёр байрлалд 2 Элементийг C_2^2 янзаар байрлуулна. Иймд нийт $C_9^4 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = 1260$ янзаар үг зохиож болно.

(2)-р аргыг хэрэглэхийн тулд a, b, c, элементүүдийг бүгд хоорондоо ялгаатай гээд a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2 гэж тэмдэглэе.

Тэгвэл эдгээр үсгээр 9 үсэгтэй үг зохиох боломжийн тоо 9! болно. Одоо ялгаатай гэж үзсэн үсгүүдийнхээ давхардлыг тоолбол a үсгийн давхардал 4!, b үсгийн давхардал 3!, c үсгийн давхардал 2! болох учир нийт үгийн боломжийн тоо

$$\frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = 1260$$

болно.

Бодлого 16. SUCCESS гэсэн үгийн үсгүүдээр зохиож болох үгийн тоог ол.

Бодлого 17. Эрэгтэй 4, эмэгтэй 5 хүүхэд байв. Дараах асуултанд хариул.

(1) Нийт 9 хүүхдээс 3 хүнтэй багийг хэдэн янзаар бүрдүүлэх вэ?

(2) Эрэгтэй 1, эмэгтэй 2 хүүхэд сонгон авч нэг эгнээнд жагсаах хэдэн боломж байгаа вэ?

Бодлого 18. A-г оролцуулсан 5 эрэгтэй, B-г оролцуулсан 5 эмэгтэй сурагчаас 5 хүн сонгох болов. Дараах асуултад хариул.

(1) Нийт хэдэн янзаар баг бүрдүүлэх вэ?

(2) Эрэгтэй 2, эмэгтэй 3 хүүхэд сонгон авах хэдэн боломж байгаа вэ?

(3) Эрэгтэй хүүхдүүдээс А-г оролцуулсан 2 хүүхэд, эмэгтэй хүүхдүүдээс B-г оролцуулсан 3 хүүхдийг хэдэн янзаар сонгох вэ?
(4) Эрэгтэй 2, эмэгтэй 3 хүүхэд сонгон авч нэг эгнээнд жагсаах хэдэн боломж байгаа вэ?

Бодлого 19. А бүлэг 6 сурагчтай ба үүнээс 3 нь эмэгтэй. Б бүлэг 5 сурагчтай ба үүнээс 2 нь эмэгтэй. 2 бүлгээс 2-с дээш сурагч оролцуулан нийт 5 хүнтэй баг бүрдүүлэх болов. Дараах асуултанд хариул.

(1) Баг бүрдүүлэх нийт боломжийн тоо хэд вэ?
(2) Багт зөвхөн 1 эмэгтэй сурагч орсон байх боломж хэд вэ?
(3) Багт дор хаяж 1 эмэгтэй сурагч орсон байх боломж хэд вэ?

Бодлого 20. Эрэгтэй 10, эмэгтэй 5 хүүхэд байв. Дараах асуултанд хариул.

(1) Эрэгтэй 4, эмэгтэй 3 хүнтэй багийг хэдэн янзаар бүрдүүлэх вэ?
(2) Тусгайлан заасан 2 хүнийг агуулсан 7 хүнтэй багийг бүрдүүлэх хэдэн боломж байгаа вэ?
(3) 3 хүн сонгоход эмэгтэй хүүхдүүдээс дор хаяж 1 хүн сонгосон байх боломж хэд вэ?

Бодлого 21. Улаан 8, цагаан 9 бөмбөгтэй уут байв. Уутнаас 3 бөмбөгийг нэг зэрэг гаргахад улаан, цагаан бөмбөг аль алиныг агуулсан байх хэдэн боломж байх вэ?

Бодлого 22. 1, ..., 10 хүртлэх тоонууд дотроос ялгаатай 3 тоо сонгоход эдгээрийн үржвэр 4-т хуваагдах боломжийн тоо хэд вэ?

Бодлого 23. 1, ..., 20 хүртлэх тоонууд дотроос ялгаатай 3 тоо сонгоход хоёр нь тэгш, нэг нь сондгой тоо байх боломжийн тоо хэд вэ? 3 тооны үржвэр тэгш тоо байх боломжийн тоо хэд вэ? Үржвэр нь 4-т хуваагдах боломжийн тоо хэд вэ? Үржвэр нь 8-д хуваагдах боломжийн тоо хэд вэ?

Бодлого 24. 1, ..., 20 хүртлэх тоонуудын олонлог авав. Гурван элементтэй дэд олонлогууд дотроос нэг элемент нь тэгш тоо байх олонлог хэд байх вэ? Гурван элементийн нийлбэр нь тэгш тоо байх олонлогийн тоо хэд вэ?

Бодлого 25. 1, ..., 20 хүртлэх тоонууд дотроос ялгаатай 3 тоо сонгоход

(1) Хамгийн их тоо нь 7-с бага, хамгийн бага тоо нь 3-с их байх боломжийн тоо хэд вэ?
(2) Хамгийн их тоо нь 7-с их байх боломжийн тоо хэд вэ?