Бүлэг 1

Боломж тоолох-Комбинаторик

Боломжийн тоог тоолох арга. Үзэгдлийн боломжийн тоог тоолохдоо боломжийг орхигдуулахгүй, давхцуулахгүй тоолох зарчим баримтална. Дараах аргаар тоолоход эрэмбэ дараатай, зөв тоолоход дөхөмтэй байдаг.

1. Толь бичгийн эрэмбэ: Толь бичигт үгсийг эрэмбэлэхэд ашигладага аргаар үйлдэл, үзэгдэл, үгийг жагсаадаг.

2. Мод: Бүх тохиолдлыг эрэмбэлэн, ялгаж зураглал хийдэг.

Нийлбэрийн арга. A, B үзэгдлүүд нэгэн зэрэг илэрдэггүй гэе. A үзэгдэл m янз(хувилбараар), B үзэгдэл n хувилбараар илэрдэг гэвэл A, B үзэгдлүүдийн аль нэг илрэх боломж $n + m$ байна.

$A_1 \ldots A_n$ үзэгдлүүд илрэх боломж $m_1 \ldots m_n$ бол эдгээрийн аль нэг илрэх боломж $m_1 + \ldots + m_n$ байна.

Жишээ нь a, a, a, b, c үсэгнүүдээс 3 үсэгтэй үг зохиох боломжийг тоолбол a үсгээр эхэлсэн 7 үг, b үсгээр эхэлсэн 3 үг, c үсгээр эхэлсэн 3 үг зохиож болох тул зохиосон үг a, b, c-ийн аль нэгээр эхлэх боломжийн тоо $7+3+3 = 13$ байна.

Үржвэрийн арга. A үзэгдэл m хувилбараараар илэрдэг ба энэ бүрт харгалзан B үзэгдэл n хувилбараар илэрдэг гэвэл A, B үзэгдлүүд аль аль нь илрэх боломж $m \cdot n$ байна.

Жишээ болгон 2 оронтой натурал тоонууд хэдэн ширхэг байхыг олъё. Аравтын орны цифр (A үзэгдэл) $1 - 9$ буюу нийт 9 боломжтой ба энэ болгонд харгалзан нэгжийн орон (B үзэгдэл) $0-9$ буюу нийт 10 боломжтой. Иймд $9 \cdot 10$ боломжтой.

Бодлого 1. 2 ширхэг улаан, 2 ширхэг цагаан, 1 ширхэг хөх өнгийн бөмбөгнөөс 3 бөмбөг сонгон 1 эгнээнд байрлуулах хэдэн боломж байх вэ?

Бодлого 2. Том жижиг 2 ширхэг шоо орхив. 2 шооны нүдний нийлбэр 10-с их байх тохиолдол хэд байх вэ?

Бодлого 3. Математикийн 5, Англи хэлний 2 төрлийн даалгавар тус бүрээс нэгийг сонгон авч асуулт бэлтгэх бол нийт хэдэн боломжтой вэ?

Бодлого 4. 10, 50, 100 төгрөгний дэвсгэртээс дор хаяж нэгийг оролцуулан 420 төгрөгний төлбөр хэдэн янзаар хийж болох вэ?

Бодолт. Бүх дэвсгэртээс дор хаяж нэгийг оролцуулах ба 20төгрөгийг зөвхөн 2 ширхэг аравтын дэвсгэртээр бүрдүүлэх боломжтой учир анхны бодлогыг

$$420 - (2 \cdot 10 + 50 + 100) = 250$$

төгрөгийг дээрх дэвсгэртүүдийгоролцуулан хэдэн боломжоор бүрдүүлэх вэ гэсэн бодлого руу шилжүүлж болно.

10 төгрөгний дэвсгэртийн тоог x, 50 төгрөгний дэвсгэртийн тоог y, 100 төгрөгний дэвсгэртийн тоог z гэвэл дээрх бодлого

$$10x + 50y + 100x = 250$$

тэгшитгэл хэдэн эерэг, бүхэл шийдтэй вэ гэсэн бодлого руу шилжинэ.

Дээрх тэгшитгэлийг хялбарчилбал

$$x + 5y + 10z = 25$$

болох ба $z \leq 3$, $y \leq 5$ байх нь ойлгомжтой. Иймд дараах тохиолдуудыг авч үзэх нь зүйтэй.

(1) $z = 1$ бол дээрх тэгшитгэл $x + 5y = 15$ болох тул $(x, y) = (0, 3)$, $(x, y) = (5, 2)$, $(x, y) = (10, 1)$, $(x, y) = (15, 0)$ шийдүүдтэй.

(2) $z = 2$ үед $x + 5y = 5$ тэгшитгэл гарах ба $(x, y) = (0, 1)$ ба $(x, y) = (5, 0)$ шийдүүдтэй.

(3) $z = 0$ үед $x + 5y = 25$ тэгшитгэл гарах тул $(x, y) = (0, 5)$, $(x, y) = (5, 4)$, $(x, y) = (10, 3)$, $(x, y) = (15, 2)$, $(x, y) = (20, 1)$, $(x, y) = (25, 0)$ шийдтэй.

Иймд нийт боломжийн тоо $4 + 2 + 6 = 12$ байна.

A, B үзэгдлүүд нэгэн зэрэг явагдах боломжгүй гэдэг нь $A \cap B = \emptyset$ ба энэ үед

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

байх нь ойлгомжтой. Иймд нийлбэрийн дүрэм нь зөвхөн энэ тохиолдолд л хүчинтэй. Энэ үед A, B үзэгдлүүдийг **үл хамаарах** үзэгдлүүд гэнэ.

Бодлого 5. Том, дунд, жижиг хэмжээтэй 3 шоо орхижээ. Шооны нүдний нийлбэр 7 байх тохиодол хэд байх вэ? Гурван ижил шоо орхисон бол энэ боломж хэд болох вэ?

Бодлого 6. 10 төгрөгний дэвсгэрт 2, 50 төгрөгний дэвсгэрт 3, 100 төгрөгний дэвсгэрт 4 ширхэг байв. Эдгээрийг ашиглан хэдэн янзын хувилбараар төлбөр хийж болох вэ?

Бодлого 7. A,B хоёр баг хоорондоо тоглон түрүүлж 4 хожил авсан баг ялагч болох цуврал тэмцээнд оржээ (хамгийн дээд тал нь 7 удаа хоорондоо тоглох боломжтой). 3 тоглолтын дараа A баг 1 хожил 2 хожигдолтой байв. Ялагч тодрохын тулд үүнээс хойших тоглолтын хожил, хожигдлын хэдэн янзын боломж байх вэ? A баг ялагч болохын тулд үүнээс хойших тоглолтын хожил, хожигдлын хэдэн янзын боломж байх вэ?

Бодолт. A баг хожих үзэгдлийг a, B баг хожих үзэгдлийг b гэе. Тэгвэл дараах диаграм зурж болно. Диаграмаас харвал нийт тоглолт болох боломж 10, үүнээс A баг хожих боломж 4 байна.

Бодлого 8. $ABCDEFGH$ куб өгсөн ба ирмэгүүд дээгүүр хөдлөх P цэг өгчээ. P цэг A цэгээс эхлэн бусад бүх орой дээр 1 удаа очоод эргэн A цэг дээр ирэх хэдэн боломж байх вэ?

Бодлого 9. 5400-ийн бүх эерэг хуваагчдын тоо болон хуваагчдын нийлбэрийг ол.

Бодолт. 5400-г анхны тоон хуваагчдад задлавал $5400 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ болно. Иймд хуваагч нь $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ хэлбэртэй байх ба a тоо 0, 1, 2, 3 утга, b тоо 0, 1, 2, 3 утга, c тоо 0, 1, 2 утга авах боломжтой.

a-ийн утга авах боломж 4 ба эдгээр боломж тус бүрт b-ийн авах утга мөн 4, a, b-ийн утга тус бүрт харгалзан c-ийн 3 утга харгалзах боломжтой тул нийт хуваагчдын тоо үржих дүрмээр $4 \times 4 \times 3 = 48$ байна.

Хуваагчдын нийлбэрийг авахын тулд $2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 + 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^1 + \ldots + 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = (2^0 + 2^1 + 2^2) \cdot (3^0 + 3^1 + 3^2) \cdot (5^0 + 5^1 + 5^2) = 15 \times 40 \times 31 = 18600$ болно.

Бодлого 10. Дараах илэрхийллийн хаалт задлавал хэдэн нийлбэр гарах вэ?
(1) $(a + b)(x + y + z)$ (2) $(a + b + c)(x + y)^2$

Бодлого 11. 1200-ийн бүх эерэг хуваагчдын тоо, сондгой хуваагчдын тоо болон бүх эерэг хуваагчдын нийлбэрийг ол.

Бодлого 12. 1-9999 хүртлэх натурал тоонууд дотроос дараах нөхцлийг хангах тоо хэд байх вэ?
(1) 0-г хоёр удаа агуулсан (2) 0-г хамгийн багадаа 1 удаа агуулсан.

Бодлого 13. (1) 300-с 800-ийн хооронд орших орон болгон нь хоорондоо ялгаатай цифртэй нийт хэдэн сондгой тоо байх вэ?
(2) $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 150$ тооны төгсгөлд хэдэн 0 байх вэ?

Сэлгэмэл. Юмсыг эрэмбэ тогтоон нэг эгнээнд жагсаасан матрицыг **сэлгэмэл** гэнэ. $r \leq n$ үед n ширхэг ялгаатай зүйлсээс r ширхэг зүйлийг ялган авах сэлгэмэлийг n ширхэг зүйлээс r ширхэгийг ялган авах **гүйлгэмэл** гэж нэрлэн P_n^r гэж тэмдэглэнэ.

P_n^r-г тоолоё.

1-р элементийг бүх элементийн алинийг ч авч болох учир n боломжоор авч болно.

2-р элементийг үлдсэн $n - 1$ элементийн алинийг ч авч болох учир $n - 1$ боломжоор авч болно.

3-р элементийг үлдсэн $n - 2$ элементийн алинийг ч авч болох учир $n - 2$ боломжоор авч болно. Ийм маягаар үргэлжлүүлбэл хамгийн сүүлийн r-р элементийг $n - (r - 1)$ элементийг авах боломжтой. үржвэрийн дүрмээр

$$P_n^r = n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot (n - r + 1)$$

болно. Үүнийг хялбарчилбал,

$$P_n^r = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot (n - r + 1) \cdot (n - r) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n - r) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n - r)!}$$

$r = n$ үед

$$P_n^n = n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

Тооцооллыг хялбар болгох үүднээс $0! = 1$ гэж авдаг.

Жишээ болгон $1-9$ ялгаатай цифрээс 5 цифрийг ялган авч авсан дараалаар цувруулан бичин тоо үүсгэжээ. Хэдэн тоо үүсэхийг олъё. $P_9^5 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$ ширхэг тоо үүснэ.

Бодлого 14. a, b, c, d, e үсэгнүүдээс 3-г сонгон үг бүтээв. Нийт хэдэн үг үүсэх вэ?

Бодлого 15. $1-7$ цифрүүдээс үсэг давтагдахгүй 4 оронтой тоо зохиов. Нийт хэдэн тоо зохиох вэ?

Бодлого 16. 5 сурагчийг хэдэн янзаар нэг эгнээнд жагсааж болох вэ?

Бодлого 17. $2-6$ цифрүүдээс ялгаатай цифр бүхий 3 оронтой хэдэн тоо зохиож болох вэ? Эдгээрээс хэд нь тэгш тоо байх вэ?

Бодолт. $P_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ тоо зохиож болно.

Тэгш тоо зохиохын тулд нэгжийн орны цифрүүд тэгш тоо байх шаардлагатай ба энд 2, 4, 6 цифрүүд тэгш ба эдгээрээс нэгийг нь 3 янзаар авах боломжтой.

Аравт болон зуутын орны хувьд үлдсэн 4 цифрээс 2-г авах учир P_4^2 боломжоор сонгоно.

Дээрх хоёрыг нэгтгэвэл үржвэрийн дүрмээр

$$3 \cdot P_4^2 = 3 \cdot 4 \cdot 3$$

болно.

Бодлого 18. 1, 2, 3, 4, 5, 6 цифрүүдээс ялгаатай цифр бүхий 3 оронтой тоо хэдэн янзаар бичих вэ? Эдгээрээс тэгш тоонууд хэдэн ширхэг вэ? Дөрөвт хуваагддаг хэдэн ширхэг тоо байгаа вэ? Тавд хуваагддаг хэдэн ширхэг тоо байгаа вэ?

Бодлого 19. 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9 тоонуудаас 2-г сонгон авч хоёр оронтой тоо үүсгэжээ. Нийт хэдэн тоо байх вэ? Эдгээрийн нийлбэр хэд вэ?

Бодлого 20. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 цифрүүдээр ялгаатай цифр бүхий 3 оронтой тоонууд зохиожээ. Эдгээрээс бүхэл тоонууд хэдэн ширхэг вэ? Эдгээрээс тэгш тоонууд хэдэн ширхэг вэ?

Бодолт. 3 оронтой тоо бүхэл байхын тулд зуутын орон нь тэг биш байх шаардлагатай. Иймд зуутын орны цифрийг нийт 6 янзаар авах боломжтой. Үлдсэн орнуудыг P_6^2 боломжоор зохиох боломжтой. Иймд үржих дүрмээр гурван оронтой нийт бүхэл тоонуудыг

$$6 \cdot 6 \cdot 5 = 180$$

хувилбараар зохиох боломжтой.

Тэгш тоо байхын тулд нэгжийн орон 0, 2, 4, 6 байх боломжтой буюу 4 боломжтой.

Хэрэв нэгжийн орон 0 бол зуут болон аравтын орныг тэг биш 6 цифрээс хоёрыг сонгох тул P_6^2 боломжоор сонгож болно.

Нэгжийн орон 2, 4, 6 цифрүүдийн аль нэг байх үед зуутын орон үлдсэн цифрүүдээс тэг биш нэг цифрийг сонгох учир 5 боломж, аравтын орон үлдсэн 5 цифрээс 1-ийг сонгох боломжтой тул нийт боломжийн тоо

$$(5 \cdot 5) \cdot 3 = 75$$

болно.

Эдгээрийг нэгтгэвэл гурван оронтой нийт тэгш тоо $P_6^2 + 75 = 30 + 75 = 105$ ширхэг байна.

Бодлого 21. 0, 1, 2, 3, 4 цифрүүдээр ялгаатай цифр бүхий 3 оронтой тоонууд хэдийг зохиож болох вэ? Эдгээрээс бүхэл тоонууд хэдэн ширхэг вэ? Эдгээрээс тэгш тоонууд хэдэн ширхэг вэ? Эдгээрээс сондгой тоонууд хэдэн ширхэг вэ? Эдгээр дотроос 9-д хуваагддаг тоо хэдэн ширхэг вэ? Эдгээр дотроос 4-д хуваагддаг тоо хэдэн ширхэг вэ?

Бодлого 22. 4 эрэгтэй, 2 эмэгтэй сурагчийг 1 эгнээнд жагсаав. Дараах асуултад хариул.

(1) 2 эмэгтэй сурагч нэг дор жагссан байх боломж хэд вэ?
(2) 2 эмэгтэй сурагч нэг дор жагсаагүй байх боломж хэд вэ?

Бодолт. (1) Хоёр эмэгтэй сурагч нэг дор жагссан байх нөхцлийг эхлээд авч үзье. Ийм тохиолдолд хоёр эмэгтэй сурагчийг нэг багц/бүлэг болгон авч үзэх нь тохиромжтой байдаг.

Энэ үед 4 эрэгтэй сурагч болон саяны авсан эмэгтэй сурагчдын 1 бүлгийг 1 эгнээнд жагсаах боломжийн тоо нь 5 гишүүнтэй олонлогийн элементийг 1 эгнээнд жагсаах боломжтой тэнцүү учир нийт боломжийн тоо

$$P_5^5 = 5!$$

байна.

Эмэгтэй сурагчдыг G_1, G_2 гэж тэмдэглэвэл 2 эмэгтэй сурагчийн 1 багц нь G_1G_2 болон G_2G_1 дараалллаар жагсаасан жагсаалт болно. Иймд олох гэж буй нийт жагсаалийн боломж

$$P_5^5 \cdot P_2^2 = 240$$

байна.

(2) 2 эмэгтэй сурагч нэг дор жагсаагүй байх үзэгдлийг (а) 4 эрэгтэй сурагчийг жагсаагаад эрэгтэй сурагчдын хооронд эмэгтэй сурагчийг жагсаах эсвэл 2 захад нь жагсаасан үзэгдэл гэж үзэж болно.

Иймд (а) үзэгдлийн боломжийн тоо $P_4^4 = 4!$ байна.

4 байранд 2 зүйлийг байрлуулах боломжийн тоо P_5^2 болох ба асуултын хариу

$$4! \cdot P_5^2 = 480$$

боломж.

Бодлого 23. 4 эрэгтэй, 3 эмэгтэй сурагчийг 1 эгнээнд жагсаав. Дараах асуултад хариул.

(1) 4 эрэгтэй сурагч нэг дор жагссан байх боломж хэд вэ?
(2) Эмэгтэй сурагч нэг дор жагсаагүй байх боломж хэд вэ?
(3) Эмэгтэй сурагчдаас зөвхөн 2 нь хамт зогссон байх боломж хэд вэ?

Бодлого 24. "hospital"гэдэг үгийн бүх үсгийг ашиглан үг зохиов. Дараах асуултад хариул.

(1) Үгийн 2 талд гийгүүлэгч орсон байх боломжийн тоо хэд вэ?
(2) h болон l үсэгнүүд 1 дор ороогүй байх боломжийн тоо хэд вэ?
(3) Үгийн төгсгөлд дор хаяж нэг гийгүүлэгч орсон байх боломжийн тоо хэд вэ?

Бодлого 25. A, B, C, D, E, F үсгүүдийг бүгдийг ашиглан үг бүтээн цагаан толгойн үсгийн эрэмбээр жагсаав.

(1) CDABEF үг хэддэх дугаартай үг вэ?
(2) 339 дэх дугаартай үг нь ямар үр вэ?

Бодолт. (1) A үсгээр эхэлсэн үгнүүдийг цагаан толгойн эрэмбээр жагсаавал

$A \times \times \times \times \times$ хэлбэртэй байх ба энэ нь нийт $5! = 120$ ширхэг байна. Үүнтэй ижлээр B үсгээр эхэлсэн үгнүүд $5! = 120$ ширхэг байна.

C үсгээр эхэлсэн үгнүүдийн хувьд $CA \times \times\times$ хэлбэрийн үг $4! = 24$ ширхэг, $CB \times \times\times$ хэлбэрийн үг $4! = 24$ ширхэг байна.

CDABEF үг нь $CB \times \times\times$ хэлбэрийн үгнүүдийн дараагийн, $CD \times \times\times$ хэлбэрийн үгнүүдийн эхлэлийн үг учир $120+120+24+24+1 = 289$ дэх дугаартай үг байна.

(2) C үсгээр эхэлсэн үгийн тоо 120 учир A, B, C-р эхэлсэн үгийн тоо 360 болох ба бидний олох 336 дугаараас их байна. Иймд энэ дугаартай үг нь C үсгээр эхэлсэн үг байна. $120 + 120 + 24 + 24 + 24 + 24 = 336$ учир энэ үг нь CF-р эхэлсэн үгийн 3 дахь үг байна. CF-р эхэлсэн үгнүүд CFABDE CFABED CFADBE ... гэж эхлэх учир хариу CFADBE байна.

Бодлого 26. S, H, U, D, A, I үсгүүдийг бүгдийг ашиглан үг бүтээн цагаан толгойн үсгийн эрэмбээр жагсаав.

(1) SHUDAI үг хэддэх дугаартай үг вэ?
(2) 110 дахь дугаартай үг нь ямар үр вэ?

Бодлого 27. 0, 1, 2, 3, 4 цифрүүдээр 5 оронтой тоо бүтээв. Нийт 5 оронтой хэдэн ширхэг вэ? Эдгээр тоог багаас нь их рүү эрэмбэлэн бичив. Жагсаалтын 40 дэх тоо ямар тоо вэ? 32104 тоо жагсаалтын хэд дэх тоо вэ?

Бодлого 28. 1, 2, 3, 4 цифрүүдээр 4 оронтой тоо бүтээв. Эхний цифр нь 1 биш, хоёрдах цифр нь 2 биш, 3 дах цифр нь 3 биш, 4 дэх цифр нь 4 биш байх тоо нийт хэд байх вэ?

Бодолт. Нийт боломжийн тоо 9 байна.

Бодлого 29. 3×4 нүд бүхий хүснэгтэнд 1-4 хүртлэх тоонуудыг аль ч мөр, баганын дагуу цифр давтагдахгүй байхаар хэдэн янзаар байрлуулж болох вэ?