0.1. Олонлог

Бид олонлогийг англи цагаан толгойн том үсгээр, олонлогийн элементийг жижиг үсгээр тэмдэглэнэ. Хэрэв x элемент A олонлогийн элемент бол $x \in A$ эсвэл $A \ni x$ гэж тэмдэглэнэ. Харин y элемент A олонлогийн элемент биш бол $x \notin A$ гэж тэмдэглэдэг.

Жишээ 1. Бүх натурал тоонуудын олонлогийг $\mathbf{N}$ гэж тэмдэглэдэг.

3 нь натурал тоо учир $3 \in \mathbf{N}$ бол 1.5 нь натурал тоо биш учир $1.5 \notin \mathbf{N}$ гэж тэмдэглэнэ.

Олонлогийг тодорхойлох арга

(1) Олонлогийг бүх элементийг нь тоочих замаар тодорхойлж болно. Ингэхдээ олонлогийн нэрийг бичин $\{\,\}$ хаалт дотор элементүүдийг бичнэ. Жишээ нь $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ гэвэл. A олонлог нь 10-с бага натурал тоонууд буюу $1, 3, 5, 7, 9$ тоонууд юм.

(2) Олонлогийн элементүүдийн шинж чанараар тодорхойлж болно. Ингэж тодорхойлохдоо $X = \{x \mid \text{шинж чанар}\}$ хэлбэрээр бичнэ. Жишээ нь өмнө тодорхойлсон A олонлогийг $A = \{x \mid 1 \le x \le 9 \text{ ба натурал тоо}\}$ хэлбэрээр бичнэ.

Жишээ 2. $f(x)$-ийн утгуудын олонлогийг $\{f(x) \mid x - \text{ийн нөхцөл}\}$ бичнэ. Энд x-ийн оронд өөр хувьсагч ашиглаж болно.

$$\{2n - 1 \mid 1 \le n \le 50, n \text{ нь натурал тоо}\}$$

олонлог 1-с 100 хүртлэх тоонуудын олонлог юм.

0.1.1. Олонлогуудын хоорондын хамаарал.

A, B олонлогууд өгсөн ба A олонлогийн элемент болгон B олонлогийн элемент болдог бол A-г B олонлогийн **дэд олонлог** гээд $A \subset B$ гэж тэмдэглэнэ. $A \subset B$ ба $B \subset A$ бол A, B олонлогууд бие биенийхээ дэд олонлог болдог бол эдгээр олонлогийг хоорондоо **тэнцүү олонлогууд** гэж нэрлэнэ.

Огтлолцол ба нэгдэл A, B олонлогуудад хоёуланд нь агуулагдах элементүүдийг эдгээр олонлогийн **огтлолцол** гээд $A \cap B$ гэж тэмдэглэнэ.

A болон B олонлогуудын элементүүдийн олонлогийг эдгээр олонлогийн нэгдэл гэж нэрлээд $A \cup B$ гэж тэмдэглэнэ.

Олонлогийг тодорхойлох аргаар $A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$ ба $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ эсвэл } x \in B\}$ болно.

Жишээ 3. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ олонлогуудын хувьд $A \cap B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ба $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13\}$ болно.

Огтлолцол ба нэгдлийн чанар Одоо олонлогуудын огтлолцол, нэгдлийн чанаруудтай танилцая.

(1) Байр солих чанар:

$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cup B = B \cup A$$

(2) Хаалт задлах чанар:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Олонлогийн гүйцээлт Бидний авч үзэж буй бүх элементүүдийн олонлогийг универсал олонлог гээд ихэвчлэн U гэж тэмдэглэдэг. A олонлог өгсөн үед

$$= \{x \mid x \in U \text{ ба } x \notin A\}$$

олонлогийг A олонлогийн гүйцээлт гэнэ.

Мөн $B \subset A$ олонлогууд өгсөн үед

$$A \setminus B = \{x \mid x \in B \text{ ба } x \notin A\}$$

олонлогийг B олонлогийн A олонлог дээрх гүйцээлт гэж нэрлэх тохиолдол байдаг.

(1) $A \cap \overline{A} = \emptyset$
(2) $\overline{\overline{A}} = A$ байна.
(3) $A \subset B$ бол $\overline{A} \supset \overline{B}$ байна.
(4) Де Морганы хууль:
  (1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
  (2) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
  болно.

Бодлого 1. $A = \{2n \mid n \text{ бүхэл тоо ба } 1 \leq n \leq 6\}$, $B = \{x \mid x = 3n, n = 1, 2, 3, 4\}$, $C = \{x \mid 18 - \text{ийн эерэг хуваагчид}\}$ бол дараах олонлогуудыг ол.
(1) $A \cap B$ (2) $A \cup B$ (3) $(A \cap B) \cap C$ (4) $(A \cup B) \cup C$

Бодлого 2. $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 4\}$, $B = \{2x \mid x = 0, 1, 2, 3\}$, $C = \{3, 4, 7\}$, $D = \{3x - 2 \mid x = 1, 2, 3, 4, 5\}$ бол дараах олонлогуудыг ол.
(1) $A \cap B$ (2) $B \cup C$ (3) $C \cap D$ (4) $A \cup C$

Бодлого 3. $A = \{1, 3, 6, 9, 12\}$, $B = \{1, 2, 4, 6, 8\}$, $C = \{6\}$ бол дараах олонлогуудыг ол.
(1) $A \cap (B \cap C)$ (2) $A \cup (B \cup C)$ (3) $(A \cup C) \cup B$

Бодлого 4. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ олонлогийг универсал олонлог гэе. U олонлогийн $A = \{2, 4, 6, 8\}$ дэд олонлогийн хувьд дараах олонлогуудыг ол.
(1) $\overline{A}$ (2) $A \cap \overline{A}$ (3) $A \cup \overline{A}$ (4) $\overline{\overline{A}}$

Бодлого 5. $U = \{x \mid \text{нэг оронтой натурал тоо}\}$, $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ $B = \{1, 3, 6, 9\}$ бол дараах олонлогуудыг ол.
(1) $\overline{A}$, (2) $\overline{B}$ (3) $\overline{A} \cap \overline{B}$ (4) $\overline{A} \cap B$ (5) $A \cap \overline{B}$ (6) $\overline{A} \cup \overline{B}$ (7) $\overline{A} \cup B$

Бодлого 6. $A = \{x \mid -3 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x \mid 2x - 8 > 0\}$, $C = \{x \mid -2 < x < 5\}$ ба бүх бодит тоонуудын олонлогийг универсал олонлог болгож авсан бол дараах олонлогуудыг ол.
(1) $\overline{B}$ (2) $A \cap \overline{B}$ (3) $\overline{B} \cup C$

Бодлого 7. k тогтмол тооны хувьд $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x \mid k - 6 \leq x \leq\}$ бол $A \subset B$ байх k тоог ол.

Бодлого 8. $U = \{n \mid 1 \leq n \leq 9, \text{натурал тоонууд}\}$ ба $A \cap B = \{4, 8\}$, $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 9\}$, $\overline{A} \cap B = \{9\}$ бол A ба $\overline{A} \cup B$-г ол.

Бодолт. Бодлогод тохирсон зураглал хийе. Мөн олонлог, түүний гүйцээлтийн чанаруудаас $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B) = B = \{4, 8\} \cup \{9\} = \{4, 8, 9\}$ болно. Мөн зураглалаас $A \cap \overline{B} = \{2, 6\}$ болохыг харж болно. Иймд $A = \{2, 4, 6, 8\}$ байна. $\overline{A} \cup B = \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$ болохыг зурагаас шалгаж олно.

Бодлого 9. $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A \cap B = \{1,5,9\}$, $A = \{1,3,5,7,9\}$ бол B олонлогийг ол.

Бодлого 10.

$$A \cap B = \{1,6\}, \quad A \cup B = \{1,2,3,5,6,7,8,9\}$$
$$A \cap C = \{1,7\}, \quad A \cup C = \{1,2,4,5,6,7,8,9\}$$

ба $B \cap C = \{1,5,9\}$ бол $B \cup C$-г ол.

Бодлого 11. $A = \{1,3,x^2-x-2\}$, $B = \{2,x+1,x^2+x-6,x^3-x^2+x-1\}$ бол $A \cap B = \{0,3\}$ байх x-ийн утгыг ол. Мөн $A \cup B$ олонлогийг ол.

Бодлого 12. $A = \{4n+1 \mid n \in \mathbf{Z}\}$ ба $B = \{2n+1 \mid n \in \mathbf{Z}\}$ бол $A \subset B$ мөн $A \neq B$ байхыг батал.

Бодлого 13. Дараах дүгнэлтийг батал.

(1) $A = \{3n-1 \mid n \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{6n+5 \mid n \in \mathbf{Z}\}$ бол $B \subset A$
(2) $A = \{3n-1 \mid n \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{2n+1 \mid n \in \mathbf{Z}\}$ бол $A = B$
(3) $A = \{3x+3y \mid x,y \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{3x+5y \mid x,y \in \mathbf{Z}\}$ бол $A = B$

Бодлого 14. 40 сурагчаас 2 асуулттай шалгалт авчээ. 1-р асуултанд 25 сурагч, 2-р асуултанд 32 сурагч, 2 асуултанд 20 сурагч зв хариулжээ. Аль ч асуултанд зв хариулж чадаагүй сурагчийн тоо хэд вэ?

Бодлого 15. 100 сурагчаас теннис (A), гольф (B), цана (C) спортоор хичээллэдэг эсэхийг асуужээ. X олонлогийн элементийн тоог $n(X)$ гэе.

$n(A) = 40$	$n(B) = 46$	$n(C) = 46$	$n(B \cap C) = 12$
$n(A \cap C) = 13$	$n(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = 16$	$n(A \cap B \cap C) = 5$	

Дараах олонлогуудыг ол.
1) $n(\overline{A} \cap B \cap \overline{C})$ 2) $n(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$ 3) $n(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$ 4) $n(A \cap B$

Бодлого 16. Тухайн дээд сургуульд элсэгчдээс A, B, C гэсэн гурван дээд сургуульд элсэх хүсэлт давхар гаргасан оюутнуудыг цуглуулан судалгаа хийжээ. Хүсэлт гаргасан эдгээр оюутны олонлогийг харгалзан A, B, C гэж тэмдэглэе.

$n(A) = 65$, $n(B) = 40$, $n(A \cap B) = 14$, $n(A \cap C) = 11$, $n(A \cup C) = 78$, $n(B \cup C) = 55$, $n(A \cup B \cup C) = 99$ бол дараах утгуудыг ол.

(1) C дээд сургуульд хэдэн оюутан элсэлт хүсэлт гаргасан бэ?
(2) Гурван сургуульд гурвууланд хүсэлт гаргасан хэдэн оюутан байгаа вэ?
(3) Эдгээр сургуулиас зөвхөн нэгд нь хүсэлт гаргасан хэдэн оюутан байгаа вэ?

Бодлого 17. 1-с 100 хүртлэх натурал тоонуудын олонлог авч дараах асуултад хариул.

(1) 2, 3, 5 аль алинд хуваагддаг хэдэн ширхэг тоо байгаа вэ?
(2) 2 болон 3-д хуваагддаггүй хэдэн ширхэг тоо байгаа вэ?
(3) 2-д хуваагддаг боловч 3, 5-д хуваагддаггүй хэдэн тоо байгаа вэ?

Бодолт. (1) n-д хуваагдах тоонуудын олонлогийг A_n гэе. 2, 3, 5 харилцан анхны тоонууд учир $A_2 \cap A_3 \cap A_5 = A_{30}$, $A_2 \cap A_3 = A_6$, $A_3 \cap A_5 = A_{15}$, $A_2 \cap A_5 = A_{10}$, болно.

$n(A_2) = 50$, $n(A_3) = 33$, $A_5 = 20$, $n(A_{30}) = 3$ байх нь ойлгомжтой.

(2) $A_2 \cap A_3 = A_6$ ба $A_6 = \{6 \cdot 1, 6 \cdot 2, \ldots, 6 \cdot 16\}$ учир $n(A_2 \cap A_3) = n(A_6) = 16$ болно.

$n(A_2 \cup A_3) = n(A_2) + n(A_3) - n(A_2 \cap A_3) = n(A_2) + n(A_3) - n(A_6) = 50 + 33 - 16 = 67$. Иймд $n(\overline{A_2 \cup A_3}) = 100 - 67 = 33$.

(3) Олох гэж буй олонлог нь $A_2 \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_5} = A_2 \cap A_3 \cup A_5$ байна. Иймд

$$\begin{aligned} n(A_2 \cap A_3 \cup A_5) &= n(A_2) - n(A_2 \cap A_5) - n(A_2 \cap A_3) + n(A_2 \cap A_3 \cap A_5) \\ &= 50 - 16 - 10 + 3 = 27 \end{aligned}$$

болно.