## 5-MA'RUZA

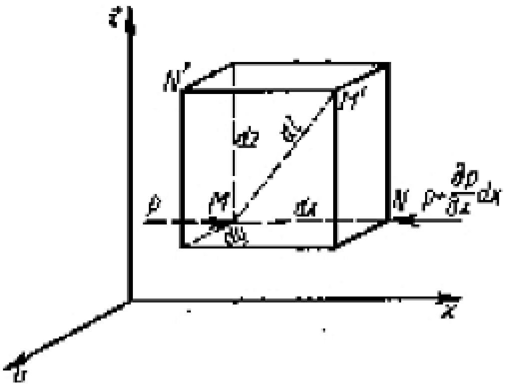
## Mavzu: EYLER VA BERNULLI TENGLAMALARI

R e j a

1. Harakatdagi ideal suyuqliklar uchun Eylerning differensial tenglamasi
2. Bernulli tenglamasining amalda qo’llanilishi**.**
3. Bernulli tenglamasining geometrik va energetik mazmuni.
4. Haqiqiy suyuqlik oqimi uchun Bernulli tenglamasi.

### 1. Harakatdagi ideal suyuqlik uchun Eyler differensial tenglamasi.

Bu tenglamani keltirib chiqarish uchun bizga ma’lum muvozanatdagi suyuqlik uchun Eylerning differensial tenglamasidan foydalanamiz.




**5.1-rasm. Fazoviy koordinatalar sistemasidagi muvozanatda turgan suyuqlikka ta`sir qiluvchi kuchlar tasviri**

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Dinamikaning asosiy qonuniga asosan, harakatdagi suyuqlikka ta’sir qilayotgan kuchlar proeksiyalarining yig’indisi massa bilan tezlanishning ko’paytmasiga teng.

$$P=m\cdot a\ ; \quad m=\rho dV\ ; \quad a=\frac{du}{d\tau}\ ; \quad dV = dx\cdot dy\cdot dz \neq 0$$

Shularni hisobga olib, quyidagi ifodani olamiz.

$$P = \rho \cdot dV \frac{du}{dt}$$

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{du_x}{dt}&=-\frac{d\,p_x}{dx}\\ \rho\frac{du_y}{dt}&=-\frac{d\,p_y}{dy}\\ \rho\frac{du_z}{dt}&=-\rho g-\frac{d\,p_z}{dz}\end{aligned}\right\}\qquad(5.1)$$

Ushbu (5.1)sistema harakatdagi ideal suyuqlik uchun Eyler differentsial tenglamasidir.

Yuqorida keltirilgan tenglamalar sistemalarini echish yo`li bilan suyuqlik harakatlanayotgan fazoning har bir nuqtasidagi tezlik va bosimni topish mumkin. Lekin bu sistemalarni echish katta qiyinchiliklar bilan amalga oshiriladi, ko`p hollarda esa hatto echish mumkin emas. Shuning uchun gidravlikada, ko`pincha, o`rtacha tezlikni topish bilan chegaralanishga to`g`ri keladi. Buning uchun, odatda, Bernulli tenglamasidan foydalaniladi. Biz bu erda Bernulli tenglamasini Eyler tenglamasidan foydalanish yo`li bilan chiqarishni ko`rsatamiz.

Buning uchun sistemaning birinchi tenglamasini dx ga, ikkinchi tenglamasini dy ga, uchinchi tenglamasini dz ga ko`paytiramiz va hosil bo`lgan uchta tenglamani qo`shamiz. Natijada quyidagi tenglamalarga ega bo`lamiz:

$$\frac{du_x}{dt}dx+\frac{du_y}{dt}dy+\frac{du_z}{dt}dz+Xdx+Ydy+Zdz-\frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)\qquad(5.2)$$

Ammo $dx=u_xdt;\ dy=u_ydt;\ dz=u_zdt$

Shu munosabatdan foydalanib, (5.2) tenglamaning chap tomonini quyidagi ko`rinishga keltiramiz:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}u_xdt+\frac{\partial u_y}{\partial t}u_ydt+\frac{\partial u_z}{\partial t}u_zdt=u_xdu_x+u_ydu_y+u_zdu_z=\frac{1}{2}d((u_x^2+u_y^2+u_z^2)$$

Lekin $u^2=u^2_x+u^2_y+u^2_z$

bo`lgani uchun (5.2) tenglama chap tomoning ko`rinishi quyidagicha bo`ladi:

$$\frac{1}{2}d((u_x^2+u_y^2+u_z^2)=\frac{1}{2}d(u^2)$$

$Xdx+Ydy+Zdz$ biror kuch potensialining to`liq differensialidir. Agar shu potentsialni $F=f(x, y, d)$ bilan begilasak, u holda quyidagiga egamiz

$$Xdx+Ydy+Zdz=dF$$

Odatda, suyuqlikka ta'sir qiluvchi massa kuch og`irlik kuchidir. Bu holda dekart koordinatalar sistemasida quyidagicha bo`ladi:

$$F=-gz$$

(5.2)tenglamaning o`ng tomonida yana bosim bilan ifodalangan munosabat bo`lib, u bosimning to`liq differensialini ifodalaydi, ya'ni

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz=dp$$

Yuqoridagilarni (5.2) tenglamaga qo`ysak, u quyidagi ko`rinishga keladi

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}(\mathrm{u}^2)+\frac{1}{p}\mathrm{dp}+\mathrm{d}(\mathrm{gz})=0$$

Hosil bo’lgan tenglamani elementar oqimchaning 1-1 kesimidan 2-2 kesimigacha integrallasak, quyidagi tenglamaga ega bo’lamiz:

$$\frac{u_1^2}{2}+\frac{p_1}{p}+g\frac{u_2^2}{2}+\frac{p_2}{p}+g_2$$

Bu tenglikdagi har bir had massa birligida ketirilgan. Agar unu kuch birligiga keltirsak, ya’ni g ga bo’lsak quyidagi holga keladi:

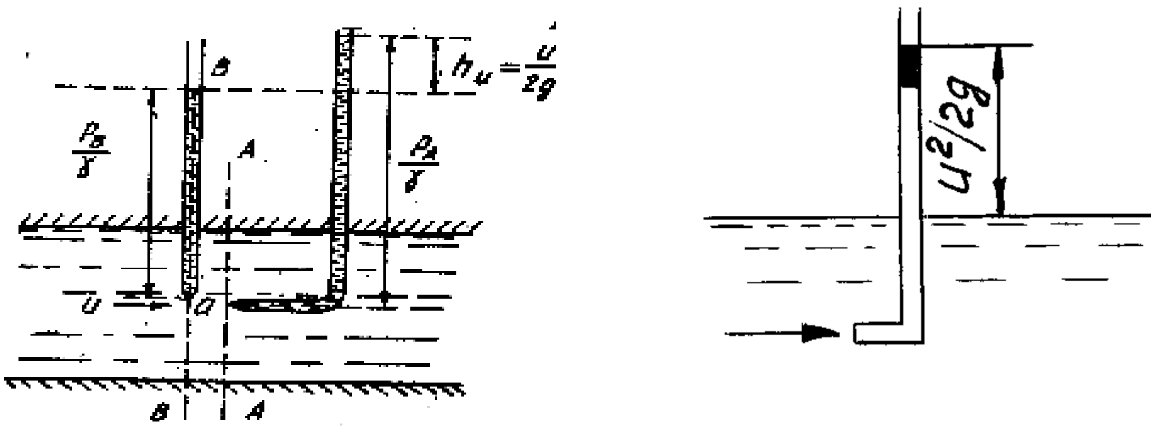
$$\frac{u_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\gamma}+z_1=\frac{u_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\gamma}+z_2$$

Bu tenglama bilganimizdek, ideal suyuqlikning elementar oqimchasi uchun *Bernulli tenglamasi* deb yuritiladi.

## 2. Bernulli tenglamasining amalda qo’llanilishi.

Bernulli tenglamasi suyuqlikning tezligini, sarfini va idishlardan suyuqliklarning oqib chiqish vaqtini aniqlashda keng qo’llaniladi.

1). ***Pito naychasi*** tezlikni aniqlashda ishlatiladi (5.2-rasm).

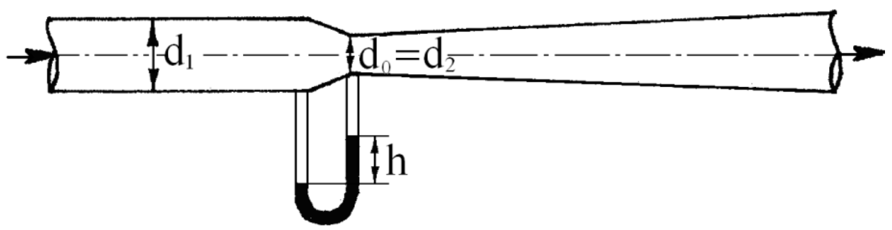



**5.2-rasm. Pito naychasi.**

Pito naychasi uchi egilgan shisha naycha bo’lib, ularda suyuqlik pyezometrlardagiga qaraganda balandroqqa ko`tariladi. Buning sababi shundaki, uchi egilgan shisha naylarda uning egilgan uchi suyuqlik harakati yo`nalishida bo`lib, gidrodinamik bosimga qo`shimcha suyuqlik tezligiga bog`liq bo`lgan bosim paydo bo`ladi. Bunda suyuqlik zarrachalarining inersiya kuchi qo`shimcha bosimga sabab bo`ladi. Uchi egilgan shisha naychalardagi balandlik quyidagilarga teng: $h'_A = p_A/\gamma + u^2_A/2g$, Pyezometrdagi suyuqlik balandligi bilan uchi egilgan shishalardagi balandlik farqi $h'_A - h_A = u^2_A/2g$, larga teng bo`ladi va tezlik balandligi deyiladi.

$$h=\frac{u^2}{2g};u=\sqrt{2gh},\ \ m/s.$$

2). ***Venturi naychasi*** (5.3 - rasm).




**5.3 - rasm. Venturi naychasi.**

Rasmdagi ikki kesim uchun Bernulli tenglamasini yozib, mos o’zgartirishlar, guruhlashlarni bajargach, tezlik va sarf tenglamasi kelib chiqadi: bu yerda $d_0=d_2$

$$\alpha = f\left(Re, \frac{d_0}{d_1}\right) \qquad (78)$$

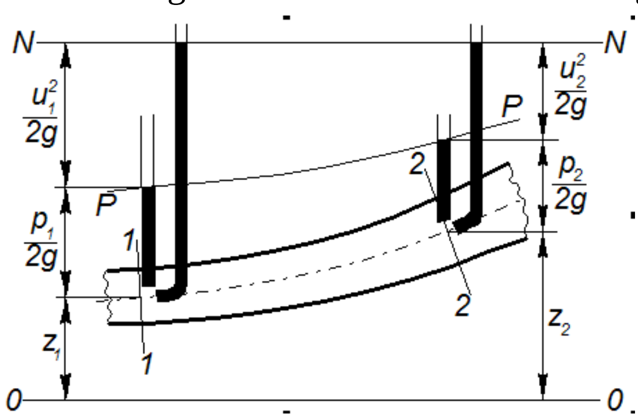
$\alpha$ - drossel asboblarining sarf koeffisienti.

Drossel asboblarining diametri quvur diametridan 3-4 marotaba kichik bo’ladi, shu sababli $(d_2/d_1)^4$ nisbatlar miqdori ham juda kichik bo’lgani uchun tezlikni quyidagi tenglama ko’rinishda yozish mumkin:

$$V_{-Ньђ} = \frac{\alpha\pi d_0^2}{4}\sqrt{2gh}$$

## 3. Bernulli tenglamasining geometrik va energetik mazmuni

Bernulli tenglamasining har bir hadi o’zining geometrik va energetik mazmunlariga ega. Buni aniqlash uchun biror elementar oqimcha olib, uning 1-1 va 2-2 kesimlarini ko`ramiz(5.3-rasm). Bu kesimlarning og`irlik markazi biror 0-0 tekislikdan $z_1$ va $z_2$ masofalarda bo`lsin. Bular qiyosiy 0-0 tekislikdan elementar oqimchaning geometrik balandliklarini ko`rsatadi. Endi olingan 1-1 va 2-2 tekisliklar markaziga pyezometr va Pito shisha naychasini o`rnatamiz. Bu holda pyezometrlarda suyuqlik kesimlar og`irlik markaziga nisbatan ma'lum balandliklarga ko`tariladi. Bu ko`tarilish gidrostatistika qismida ko`rganimizdek kesimlarda $h_1=p_1/\gamma$, $h_2=p_2/\gamma$, ga teng bo`ladi. Bu erda $h_1$, $h_2$, -lar pyezometrik balandliklar deb ataladi. Odatda, pyezometrlar yordamida trubalar hamda suyuqlik harakat qilayotgan boshqa idishlarda gidrodinamik bosim **o**`lchanadi.




**5.3 – rasm. Uchi egilgan Pito shisha naychalari.**

Uchi egilgan Pito shisha naychalarida suyuqlik pezometrlar-dagiga qaraganda balandroqqa ko`tariladi va balandlik quyidagilarga teng:

$$h'_1 = p_1/\gamma + u^2_1/2g,\ h'_2 = p_2/\gamma + u^2_2/2g,$$

Pyezometrdagi suyuqlik balandligi bilan uchi egilgan shishalardagi balandlik farqi

$$h'_1 - h_1 = u^2_1/2g,\ \ h'_2 - h_2 = u^2_2/2g,$$

larga teng bo`ladi va tezlik balandligi deyiladi.

Shunday qilib, geometrik nuqtai nazardan Bernulli tenglamasining hadlari quyidagicha ataladi:

$u^2_1/2g$, $u^2_2/2g$, - suyuqlikning tegishli kesimlaridagi tezlik balandligi:

$p_1/\gamma$, $p_2/\gamma$, - pyezometrik balandliklar;

$z_1$, $z_2$, - geometrik balandliklar

(tegishli kesimlarning og`irlik markazi 0-0 tekisligidan qancha balandlikda turishini kursatadi).

$u^2/2g$, $p/\gamma$, $z$ larning birliklari uzunlik birliklariga tengdir. Pyezometrlardagi suyuqlik balandliklarini birlashtirsak, hosil bo`lgan chiziq pyezometrik chiziq deyiladi.

Bernulli tenglamasidan ko;rinadiki, tezlik balandligi, pyezometrik va geometrik balandliklarining umumiy yigindisi o`zgarmas miqdordir.

Gidrodinamikada bu uchta balandliklap $u /2g$ , $p/\gamma$ va $z$ ning yigindisi suyuqlikning to`liq bosimi (napori) deb ataladi va **H** bilan belgilanadi:

$$H = u^2/2g + p/\gamma + z = const.$$

Bular ideal elementar oqimchalar uchun Bernulli tenglamasining geometrik ma'nosini bildiradi. Uning energetik ma'nosi kinetik energiyaning o'zgarish qonuni bo`yicha chiqarilishiga asoslangan. Bernulli tenglamasi suyuqliklar uchun energiyaning saqlanish qonunidir. Bernulli tenglamasining chap tomoni elementar oqimchaning 1-1 kesimidagi to`liq solishtirma energiya bo`lib, u 2-2 kesimdagi to`liq solishtirma energiyaga teng yoki umuman o`zgarmas miqdordir.

**Solishtirma energiya** deb og`irlik birligiga to`g`ri kelgan energiya miqdoriga aytamiz. Bu aytilganlarga asosan Bernulli tenglamasi hadlarining energetik yoki fizik ma'nosi quyidagicha bo`ladi:

$u^2_1/2g$, $u^2_2/2g$, -elementar oqimchaning 1-1,va 2-2 kesimlarga tegishli solishtirma kinetik energiyasi;

$p_1/\gamma + z_1$, $p_2/\gamma + z_2$, -elementar oqimcha kesimlari uchun solishtirma potentsial energiya;

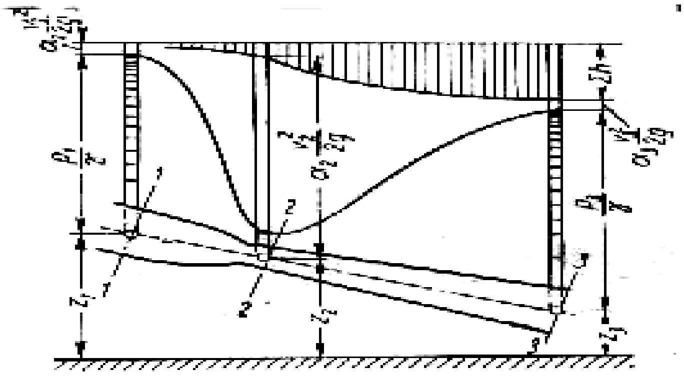
$p_1/\gamma$, $p_2/\gamma$, -kesimlarga tegishli bosim bilan ifodalanuvchi solishtirma energiya;

$z_1$, $z_2$, - 1-1 va 2-2 kesimlarga tegishli og`irlik bilan ifodalanuvchi solishtirma energiya.

Suyuqlik harakati vaqtida mexanikaning qonunlariga asosan, ish bajariladi. Shu bajarilgan ishlar bo`yicha Bernulli tenglamasini quyidagicha sharhlash mumkin: ikkita kesim uchun yozilgan Bernulli tenglamasi shu ikki kesimda tegishli hadlarining ayirmalaridan tashkil topadi: $(u^2_1 - u^2_2)/2g$ -kinetik energiyaning birlik og`irlik uchun o`zgarishi; $(p_1 - p_2)/\gamma$ -bosim kuchi bajargan ishning birlik og`irlikka tegishli qismi; $z_1 - z_2$ -og`irlik kuchi bajargan ishning birlik og`irlikka tegishli qismi. Demak, suyuqlik harakat qilayotganda solishtirma kinetik va solishtirma potensial energiyalar harakat davomida o'zgarib boradi, lekin to`liq solishtirma energiya o`zgarmas bo`ladi.

## 4. Haqiqiy suyuqlik oqimi uchun Bernulli tenglamasi.

Endi real suyuqlik elementar oqimchasi uchun Bernulli tenglamasining grafigini chizamiz. Buning uchun 1-1, 2-2 va 3-3 kesimlardagi tezliklari $u_1, u_2, u_3$, bosimlari $p_1, p_2, p_3$ bo`lgan elementar oqimcha olamiz. Bu oqimcha uchun kesimlarda pyezometr va uchi egilgan shisha naycha o`rnatamiz. Pyezometrlardagi suyuqlik balandliklarini tutashtirib, pyezometrik chiziqni hosil qilamiz. Uchi egik naychalarda suyuqlik balandliklarini tutashtirib suyuqlik bosimi (napori) chizigini hosil qilamiz.



**5.4-rasm. Real suyuqlik oqimi harakati**

Rasmga muvofiq: $H_1 > H_2 > H_3$. Demak real suyuqlik oqimi harakat qilganda solishtirma energiyaning ma'lum qismi yo’qotilar ekan.

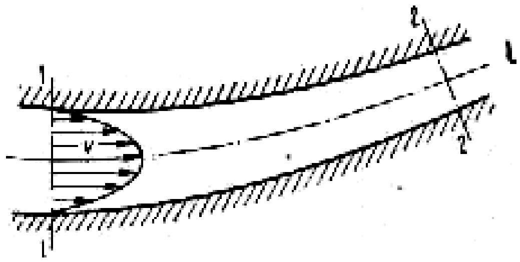
Bu yo`qotishni Σh bilan belgilaymiz. Real suyuqlik harakat qilganda ichki ishqalanish kuchi natijasida gidravlik qarshilik paydo bo`ladi va uni engish uchun albatta ma'lum bir miqdor energiya sarflash kerak bo`ladi. Yuqorida keltirilgan tengsizlik ana shu yoqotilgan energiya hisobiga bo`ladi. 1- va 2- kesimlar orasidagi yoqotilgan solishtirma energiya gidravlik bosimlar farqiga teng**.**

$$\Sigma h = H_1 - H_2$$

Shu bilan birga harakat kesimida tezliklarni notekis taqsimlanganini hisobga olibKoriolis koeffisienti α ni kiritamiz:

$$\alpha = \frac{\int_\omega \frac{u^2}{2g} d\omega}{\frac{u^2_{yp}}{2g}\omega}$$

Bu koeffisient ko’ndalang kesim bo’yicha tezlikning notekis taqsimlanishini ifodalaydi (5.5-rasm).



**5.5-rasm. Ko’ndalang kesim bo’yicha tezlikning notekis taqsimlanishi.**

$$H_1 = \alpha_1 \frac{u^2_{yp1}}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1; \qquad H_2 = \alpha_2 \frac{u^2_{yp2}}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2;$$

Shunday qilib xaqiqiy suyuqlik oqimi uchun Bernulli tenglamasini yozamiz:

$$\alpha_1 u_{yp1}^2/2g + p_1/\gamma + z_1 = \alpha_2 u_{yp2}^2/2g + p_2/\gamma + z_2 + \Sigma h$$

## Nazorat uchun savollar

1. Harakatdagi ideal suyuqlik uchun Eylerning differentsial tenglamasini yozing va tushuntiring.
2. Bernulli tenglamasi har bir hadining geometrik mazmunini aytib bering.
3. Pyezometrik balandlik deb nimaga aytiladi?
4.Bernulli tenglamasi har bir hadining energetik mazmunini aytib bering.
5. Uchi egilgan Pito naychalarida suyuqlik pyezometrdagiga nisbatan nima uchun balandroq ko'tariladi ?
6. Uchi egilgan Pito naychalaridagi va pyezometrdagi suyuqliklar balandliklari farqi nimaga teng?
7. Venturi naychasi deb nimaga aytiladi?
8. Haqiqiy suyuqlik oqimida gidravlik yo`qotish nima sababdan paydo bo`ladi?
9. Koriolis koeffisientini tushuntiring?
10. Haqiqiy suyuqlik oqimi uchun Bernulli tenglamasini yozing.

## Foydalaniladigan asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar ro'yxati


1. Latipov K.Sh. Gidravlika, gidromashinalar va gidropnevmoyuritgichlar. - T., 1994.
2. Latipov K.Sh. Gidravlika va gidroyuritmalar. - T., 1992.
3. Umarov A.Yu. Gidravlika. «O'zbekiston». T. 2002.
4. Bozorov D.R., Karimov R.M. Gidravlika asoslari. T. 2004.
5. Shokirov A.A., Karimov A.A., Parmonov A.E. "Ixcham gidravlika" Toshkent, 2010.
6. Гиргидов А.Д. Механика жидкости и газа (Гидравлика). Санкт-Петербург. Издательство СПбГПУ. 2004.
7. Дулин В.С., Заря А.Н. Гидравлика и гидропривод. - М.: Недра, 1991.


## Qo'shimcha adabiyotlar


1. Karimov A.A., Mukolyants A.A. Gidravlika fanidan tajriba ishlari uchun metodik ko'rsatma. - T., 2002.
2. Кудинов В.А. Гидравлика. - М: Высшая школа 2006.
3. Ubaydullaev P.X., Ubaydullaev B.P. Amaliy suyuqlik mexanikasi (Gidravlika) o'quv qo'llanma.
4. Shokirov A.A., Karimov A.A., Mukolyans A.A. Gidravlika fanidan tajriba ishlari uchun metodik ko'rsatma. - T., 2010.
5. Shokirov A.A., Xamidov A.A., Isanov Sh.R. Gidromexanikadan laboratoriya amaliyotlari (o'quv qo'llanma). - Toshkent, 2004.


## Elektron resurslar

http://www.uzbekistan.uz http://www.bilim.uz