5-MA'RUZA
Mavzu: EYLER VA BERNULLI TENGLAMALARI

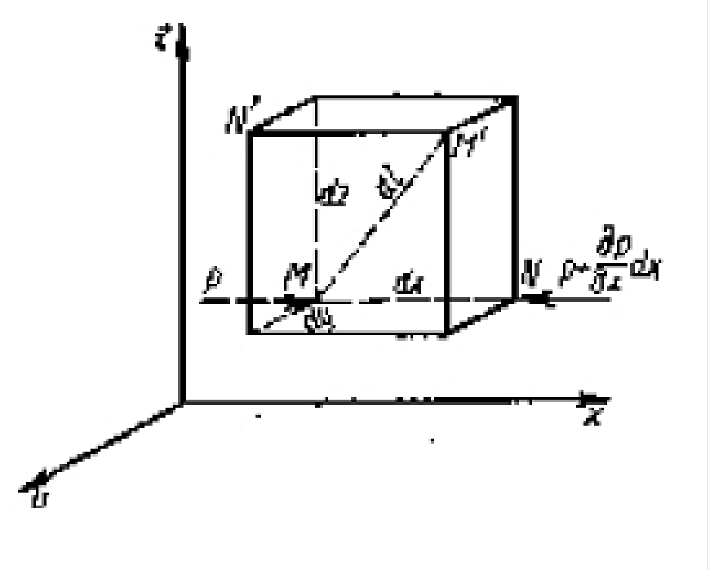
R E J A

1. HARAKATDAGI IDEAL SUYUQLIKLAR UCHUN EYLERNING DIFFERENSIAL TENGLAMASI
2. BERNULLI TENGLAMASINING AMALDA QO'LLANILISHI.
3. BERNULLI TENGLAMASINING GEOMETRIK VA ENERGETIK MAZMUNI.
4. HAQIQIY SUYUQLIK OQIMI UCHUN BERNULLI TENGLAMASI.

Harakatdagi ideal suyuqlik uchun Eyler differensial tenglamasi.

Bu tenglamani keltirib chiqarish uchun bizga ma’lum muvozanatdagi suyuqlik uchun Eylerning differensial tenglamasidan foydalanamiz.

$$
\left.
\begin{aligned}
&-\frac{\text{äð}}{\text{äõ}} = 0 \\
&-\frac{\text{äð}}{\text{äó}} = 0 \\
&-\rho g - \frac{\text{äð}}{\text{äz}} = 0
\end{aligned}
\right\}
$$



Fazoviy koordinatala sistemasidagi muvozanatda turgan Suyuqlikka ta`sir qiluvchi kuchlar tasviri

Dinamikaning asosiy qonuniga asosan, harakatdagi suyuqlikka ta'sir qilayotgan kuchlar proeksiyalarining yig'indisi massa bilan tezlanishning ko'paytmasiga teng.

$$P=m\cdot a\,; \quad m=\rho dV\,; \quad a=\frac{du}{d\tau}\,; \quad dV=dx\cdot dy\cdot dz\neq 0$$

Shularni hisobga olib, quyidagi ifodani olamiz.

$$P=\rho\cdot dV\frac{du}{dt}$$

SISTEMA HARAKATDAGI IDEAL SUYUQLIK UCHUN EYLER DIFFERENSIAL TENGLAMASI

$$\left.\begin{aligned}
\rho \frac{du_x}{dt} &= -\frac{d\,\mathrm{p}_x}{dx} \\
\rho \frac{du_y}{dt} &= -\frac{d\,\mathrm{p}_y}{dy} \\
\rho \frac{du_z}{dt} &= -\rho g - \frac{d\,\mathrm{p}_z}{dz}
\end{aligned}\right\}$$

Sistemaning birinchi tenglamasini dx ga, ikkinchi tenglamasini dy ga, uchinchi tenglamasini dz ga ko`paytiramiz va hosil bo`lgan uchta tenglamani qo`shamiz. Natijada quyidagi tenglamalarga ega bo`lamiz:

$$\frac{du_x}{dt}dx+\frac{du_y}{dt}dy+\frac{du_z}{dt}dz+Xdx+Ydy+Zdz-\frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)$$

Ammo $dx=u_x dt;\ dy=u_y dt;\ dz=u_z dt$

Shu munosabatdan foydalanib, (5.2) tenglamaning chap tomonini quyidagi ko`rinishga keltiramiz:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}u_x dt+\frac{\partial u_y}{\partial t}u_y dt+\frac{\partial u_z}{\partial t}u_z dt=u_x du_x+u_y du_y+u_z du_z=\frac{1}{2}d((u_x^2+u_y^2+u_z^2)$$

Lekin $u^2=u^2{}_x+u^2{}_y+u^2{}_z$

bo`lgani uchun (5.2) tenglama chap tomoning ko`rinishi quyidagicha bo`ladi:

$$\frac{1}{2}d((u_x^2+u_y^2+u_z^2)=\frac{1}{2}d(u^2)$$

$Xdx+Ydy+Zdz$ biror kuch potensialining to`liq differensialidir. Agar shu potentsialni $F=f(x, y, d)$ bilan begilasak, u holda quyidagiga egamiz

$$Xdx+Ydy+Zdz=dF$$

Odatda, suyuqlikka ta'sir qiluvchi massa kuch og`irlik kuchidir. Bu holda dekart koordinatalar sistemasida quyidagicha bo`ladi:

$$F=-gz$$

(5.2)tenglamaning o`ng tomonida yana bosim bilan ifodalangan munosabat bo`lib, u bosimning to`liq differensialini ifodalaydi, ya'ni

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz=dp$$

Yuqoridagilarni (5.2) tenglamaga qo`ysak, u quyidagi ko`rinishga keladi

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}(u^2)+\frac{1}{p}\mathrm{dp}+\mathrm{d}(gz)=0$$

Hosil bo’lgan tenglamani elementar oqimchaning 1-1 kesimidan 2-2 kesimigacha integrallasak, quyidagi tenglamaga ega bo’lamiz:

$$\frac{u_1^2}{2}+\frac{p_1}{p}+g\frac{u_2^2}{2}+\frac{p_2}{p}+g_2$$

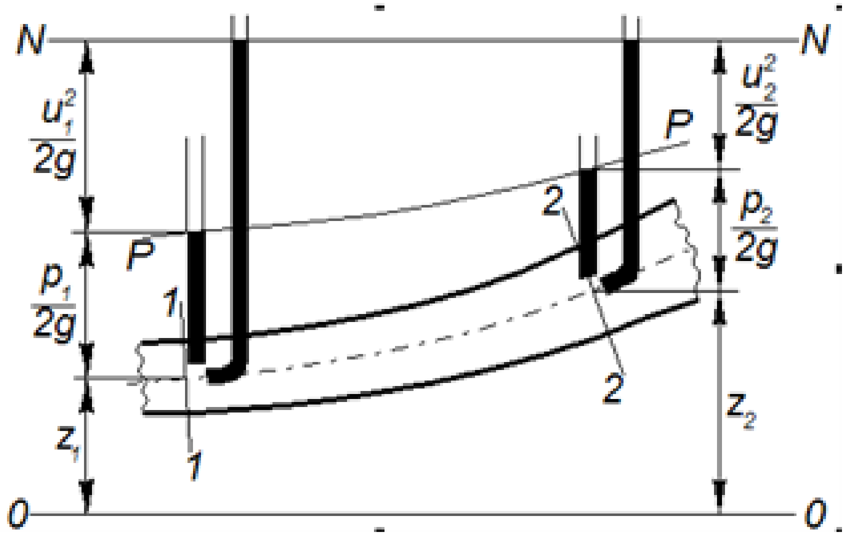
Bu tenglikdagi har bir had massa birligida ketirilgan. Agar unu kuch birligiga keltirsak, ya’ni g ga bo’lsak quyidagi holga keladi:

$$\frac{u_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\gamma}+z_1=\frac{u_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\gamma}+z_2$$

Bu tenglama bilganimizdek, ideal suyuqlikning elementar oqimchasi uchun *BERNULLI TENGLAMASI* deb yuritiladi

3. Bernulli tenglamasining geometrik va energetik mazmuni

Bernulli tenglamasining har bir hadi o'zining geometrik va energetik mazmunlariga ega. Buni aniqlash uchun biror elementar oqimcha olib, uning 1-1 va 2-2 kesimlarini ko`ramiz(5.3-rasm). Bu kesimlarning og`irlik markazi biror 0-0 tekislikdan z_1 va z_2 masofalarda bo`lsin. Bular qiyosiy 0-0 tekislikdan elementar oqimchaning geometrik balandliklarini ko`rsatadi. Endi olingan 1-1 va 2-2 tekisliklar markaziga pyezometr va Pito shisha naychasini o`rnatamiz. Bu holda pyezometrlarda suyuqlik kesimlar og`irlik markaziga nisbatan ma'lum balandliklarga ko`tariladi. Bu ko`tarilish gidrostatistika qismida ko`rganimizdek kesimlarda $h_1=p_1/\gamma$, $h_2=p_2/\gamma$, ga teng bo`ladi. Bu erda h_1, h_2, -lar pyezometrik balandliklar deb ataladi. Odatda, pyezometrlar yordamida trubalar hamda suyuqlik harakat qilayotgan boshqa idishlarda gidrodinamik bosim o`lchanadi.



5.3 – rasm. Uchi egilgan Pito shisha naychalari.

Uchi egilgan Pito shisha naychalarida suyuqlik pezometrlar-dagiga qaraganda balandroqqa ko`tariladi va balandlik quyidagilarga teng:

$$h'_1 = p_1/\gamma + u^2{}_1/2g, \; h'_2 = p_2/\gamma + u^2{}_2/2g,$$

Pyezometrdagi suyuqlik balandligi bilan uchi egilgan shishalardagi balandlik farqi

$$h'_1 - h_1 = u^2{}_1/2g, \; h'_2 - h_2 = u^2{}_2/2g,$$

larga teng bo`ladi va tezlik balandligi deyiladi.

Shunday qilib, geometrik nuqtai nazardan Bernulli tenglamasining hadlari quyidagicha ataladi:

$u^2_1/2g$, $u^2_2/2g$, - suyuqlikning tegishli kesimlaridagi tezlik balandligi:

p_1/γ, p_2/γ, - *pyezometrik balandliklar;*

z_1, z_2, - *geometrik balandliklar*

(tegishli kesimlarning og`irlik markazi 0-0 tekisligidan qancha balandlikda turishini kursatadi).

$u^2/2g$, p/γ, z larning birliklari uzunlik birliklariga t*engdir. Pyezometrlardagi suyuqlik balandliklarini birlashtirsak, hosil bo`lgan chiziq pyezometrik chiziq deyiladi.*

Bernulli tenglamasidan ko;rinadiki, tezlik balandligi, pyezometrik va geometrik balandliklarining umumiy yigindisi o`zgarmas miqdordir.

Gidrodinamikada bu uchta balandliklap *u /2g , p/γ va z* ning yigindisi suyuqlikning to`liq bosimi (napori) d*eb ataladi va* ***H*** *bilan belgilanadi:*

$$\boldsymbol{H = u^2/2g + p/\gamma + z = const.}$$

Bular ideal elementar oqimchalar uchun Bernulli tenglamasining geometrik ma'nosini bildiradi. Uning energetik ma'nosi kinetik energiyaning o'zgarish qonuni bo`yicha chiqarilishiga asoslangan. Bernulli tenglamasi suyuqliklar uchun energiyaning saqlanish qonunidir. Bernulli tenglamasining chap tomoni elementar oqimchaning 1-1 kesimidagi to`liq solishtirma energiya bo`lib, u 2-2 kesimdagi to`liq solishtirma energiyaga teng yoki umuman o`zgarmas miqdordir.

Solishtirma energiya deb og`irlik birligiga to`g`ri kelgan energiya miqdoriga aytamiz. Bu aytilganlarga asosan Bernulli tenglamasi hadlarining energetik yoki fizik ma'nosi quyidagicha bo`ladi:

$u^2_1/2g$, $u^2_2/2g$, -elementar oqimchaning 1-1,va 2-2 kesimlarga tegishli solishtirma kinetik energiyasi;

$p_1/\gamma + z_1$, $p_2/\gamma + z_2$, *-elementar oqimcha kesimlari uchun solishtirma potentsial energiya;*

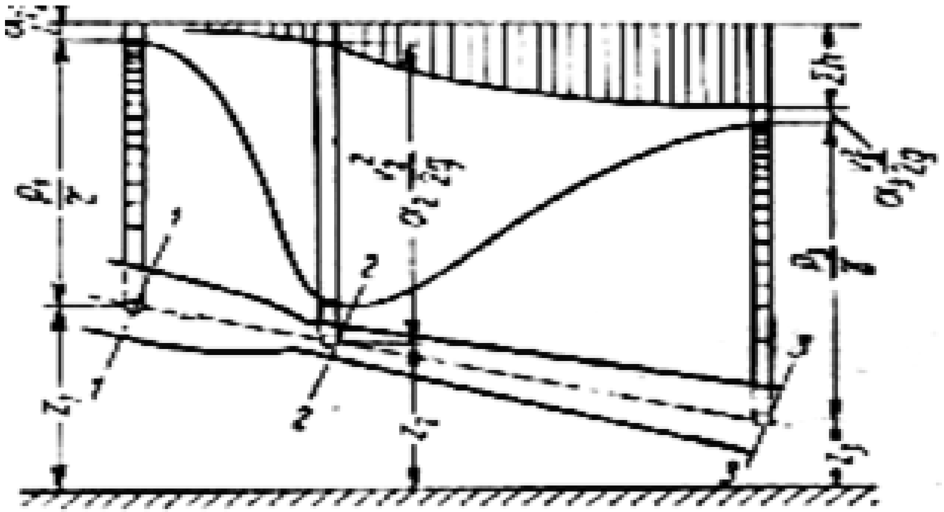
p_1/γ, p_2/γ, -k*esimlarga tegishli bosim bilan ifodalanuvchi solishtirma energiya;*

z_1, z_2, - 1-1 va 2-2 k*esimlarga tegishli og`irlik bilan ifodalanuvchi solishtirma energiya.*

Suyuqlik harakati vaqtida mexanikaning qonunlariga asosan, ish bajariladi. Shu bajarilgan ishlar bo`yicha Bernulli tenglamasini quyidagicha sharhlash mumkin: ikkita kesim uchun yozilgan Bernulli tenglamasi shu ikki kesimda tegishli hadlarining ayirmalaridan tashkil topadi: $(u^2_1 - u^2_2)/2g$ -kinetik energiyaning birlik og`irlik uchun o`zgarishi; $(p_1-p_2)/\gamma$ - bosim kuchi bajargan ishning birlik og`irlikka tegishli qismi; z_1-z_2 - og`irlik kuchi bajargan ishning birlik og`irlikka tegishli qismi. Demak, suyuqlik harakat qilayotganda solishtirma kinetik va solishtirma potensial energiyalar harakat davomida o’zgarib boradi, lekin to`liq solishtirma energiya o`zgarmas bo`ladi.

4. Haqiqiy suyuqlik oqimi uchun Bernulli tenglamasi.

Endi real suyuqlik elementar oqimchasi uchun Bernulli tenglamasining grafigini chizamiz. Buning uchun 1-1, 2-2 va 3-3 kesimlardagi tezliklari u_1, u_2, u_3, bosimlari p_1, p_2, p_3 bo`lgan elementar oqimcha olamiz. Bu oqimcha uchun kesimlarda pyezometr va uchi egilgan shisha naycha o`rnatamiz. Pyezometrlardagi suyuqlik balandliklarini tutashtirib, pyezometrik chiziqni hosil qilamiz. Uchi egik naychalarda suyuqlik balandliklarini tutashtirib suyuqlik bosimi (napori) chizigini hosil qilamiz.



Real suyuqlik oqimi harakati

Rasmga muvofiq: $H_1 > H_2 > H_3$. Demak real suyuqlik oqimi harakat qilganda solishtirma energiyaning ma'lum qismi yo’qotilar ekan.

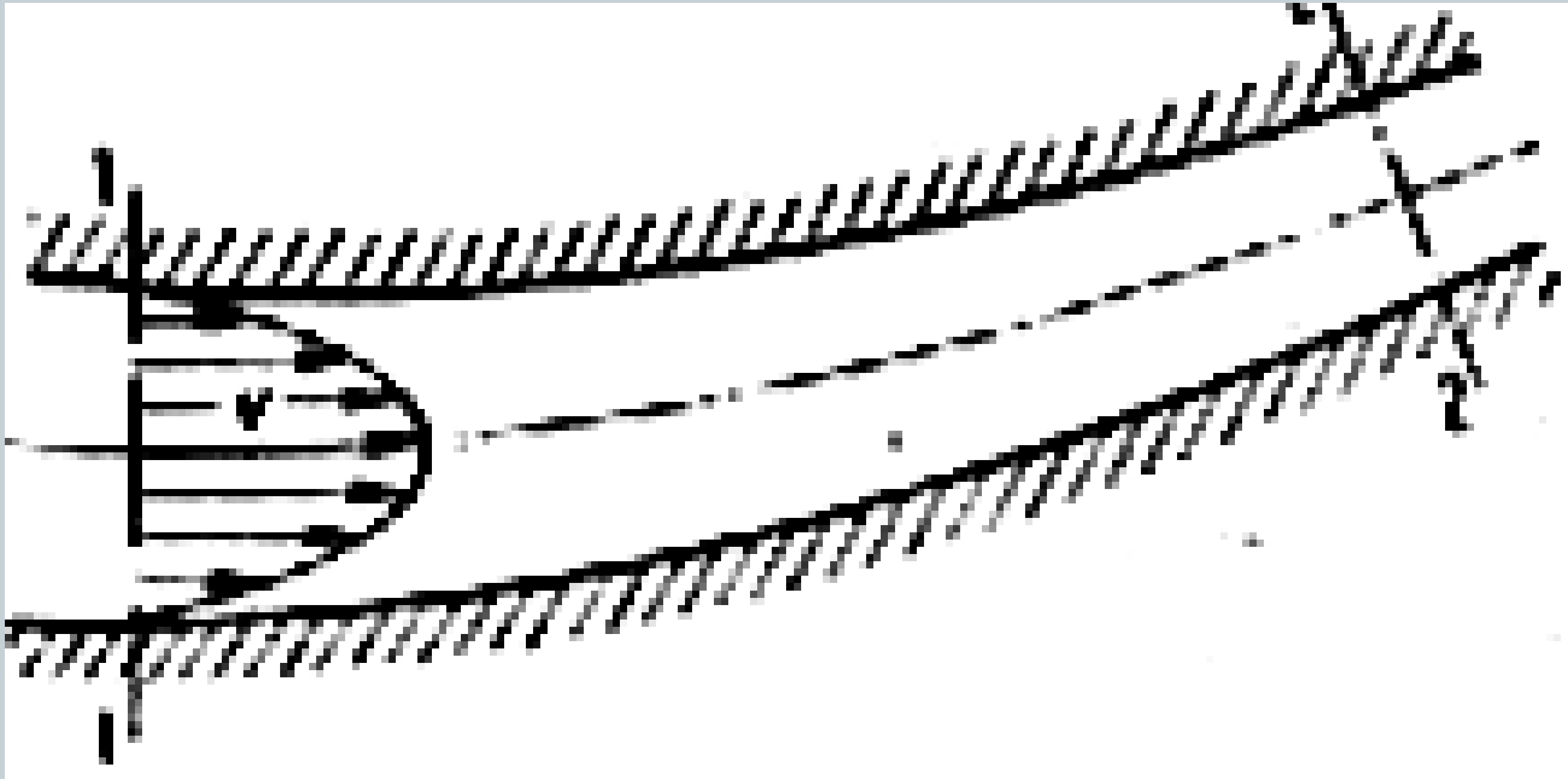
Bu yo`qotishni Σh bilan belgilaymiz. Real suyuqlik harakat qilganda ichki ishqalanish kuchi natijasida gidravlik qarshilik paydo bo`ladi va uni engish uchun albatta ma'lum bir miqdor energiya sarflash kerak bo`ladi. Yuqorida keltirilgan tengsizlik ana shu yoqotilgan energiya hisobiga bo`ladi. 1- va 2- kesimlar orasidagi yoqotilgan solishtirma energiya gidravlik bosimlar farqiga teng.

$$\sum h = H_1 - H_2$$

Shu bilan birga harakat kesimida tezliklarni notekis taqsimlanganini hisobga olibKoriolis koeffisienti α ni kiritamiz:

$$\alpha = \frac{\int_{\omega} \frac{u^2}{2g} d\omega}{\frac{u^2_{yp}}{2g}\omega}$$

Bu koeffisient ko'ndalang kesim bo'yicha tezlikning notekis taqsimlanishini ifodalaydi



Ko'ndalang kesim bo'yicha tezlikning notekis taqsimlanishi.

Shunday qilib xaqiqiy suyuqlik oqimi uchun Bernulli tenglamasini yozamiz:

$$\alpha_1 u_{yp1}{}^2/2g + p_1/\gamma + z_1 = \alpha_2 u_{yp2}{}^2/2g + p_2/\gamma + z_2 + \Sigma h$$

E’TIBORINGIZ
UCHUN
RAXMAT!