



Course name: *Algorithm of calculating methods*

Course language: **Uzbek**

Instructor: **Muhtorjon Yusupov**

Lecture 2 : Algorithm of numerical solution of algebraic and transcendental equations. Method of payments. Newtonian method

Fan nomi: *Hisoblash usullarini algoritmlash*

Fan o'qituvchisi: **Muhtorjon Yusupov**

2-mavzu: *Matematik tavsif tenglamalarining yechish usullari: Algebraik va transtsendent tenglamalarni to'g'ri va iteratsiya usullari bilan yechish usullarining algoritmlarini tuzish. Nyuton metodi*

2 - mavzu. Matematik tavsif tenglamalarining yechish usullari: Algebraik va transtsendent tenglamalarni to'g'ri va iteratsiya usullari bilan yechish usullarining algoritmlarini tuzish.(Algebraik va transtsendent tenglamalarni ildizlarni ajratish. Teng yarmiga bo'lish usuli).

Reja:

1. Masalaning qo'yilishi.
2. Ildizlarni ajratish.
3. Oralikni teng yarmiga bo'lish usuli, uning ishchi algoritmi.

Tayanch iboralar:

Algebraik tenglama, transtsendent, oraliq, ildiz, hosila, uzluksiz, uchuvchi, kamayuvchi, keltirilgan tenglama, Dekart koordinatasi.

1. MASALANING QO'YILISHI.

Bir noma'lumli istalgan tenglamani quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin

$$f(x)=0, \quad (1)$$

bu erda $f(x)$ funktsiya $[a, b]$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz.

Ta'rif. (1) tenglamaning *ildizi (echimi)* deb shunday ξ ($a \leq \xi \leq b$) songa aytiladiki, ξ ni (1) ga kuyganda

$$f(\xi) = 0$$

ayniyat hosil bo'ladi.

Agar (1) da $f(x)$ funktsiya algebraik, ya'ni

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad (2)$$

bo'lsa, u xolda (1) *algebraik tenglama* deb ataladi. (2) da a_0, a_1, \dots, a_n — istalgan sonlar, p — natural son.)

Algebraik tenglamaga misolar:

$$x^2 - 5x + 6 = 0; \quad \sqrt{2x+6} + \sqrt{6x-4} = 14; \quad \frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} = \frac{x-1}{4} \text{ va x.k.}$$

Algebraik tenglama deganda (2) ko'rinishdagi tenglama ko'zda tutiladi. Keltirilgan misollardagi ikkinchi va uchinchi tenglamalarni sodda amallar bajarib (2) ko'rinishga keltirish mumkin.

Agar (1) tenglamada $f(x)$ funktsiya algebraik bo'lmasa, ya'ni uni (2) ko'rinishda ifodalab bo'lmasa, u xolda (1) ga *transtsendent tenglama* deyiladi. Transtsendent tenglamaga misollar:

$$x - 10\sin x = 0; \quad 2x - 2\cos x = 0; \quad \lg(x+1) = \operatorname{tg} x \text{ va x.k.}$$

Ko'rsatkichli (a^x), logarifmik ($\log x$), trigonometrik ($\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ va x.k.) funktsiyalar algebraik bulmagan (transtsendent) funktsiyalardir.

(1) tenglama haqiqiy yoki kompleks ildizga ega bo'lishi mumkin. Biz faqat haqiqiy ildizlar topish bilan shugullanamiz va quyidagi masalalarni echamiz:

- 1) (1) tenglama haqiqiy ildizga egami yoki yukmi; agar ega bo'lsa ildizlar soni nechta?
- 2) haqiqiy ildizlarni aniq usullar bilan yoki berilgan aniqlikda taqribiy usullar bilan topish;

Oliy algebradagi algebraik tenglamalarning ba'zi xossalarini isbotsiz keltiramiz:

- 1) Har qanday algebraik tenglama juda bulmaganda bitta ildizga ega (haqiqiy yoki kompleks).
- 2) Kar qanday p tartibli algebraik tenglamaning ildizlari soni p dan katta bo'lmaydi.
- 3) Har qanday haqiqiy koeffitsientli algebraik tenglama faqat juft sonli kompleks ildizlarga ega bo'lishi mumkin.
- 4) Har qanday tok darajali algebraik tenglama juda bulmaganda bitta haqiqiy ildizga ega.

Algebraik tenglama ildizlarini qanday topamiz?

1-, 2-tartibli tenglamalar uchun tayyor hisoblash formulalari mavjud bo'lib, ular bizga o'rta maktab matematikasidan ma'lum. Bu formulalarda ildizlar tenglamaning koeffitsientlari orqali ifodalanadi (masalan kvadrat tenglamaning ildizlarini hoblashda). 3- va 4- tartibli tenglamalar uchun ham formulalar mavjud. Biroq bu formulalar murakkab ko'rinishda. 5- va undan yuqori darajali algebraik tenglamalar uchun bunday formulalarning bo'lishi mumkin emas. Buni Norvegiyalik matematik Abel' isbotlagan. Bunday tenglamalarni faqat xususiy xollardagina echish mumkin (masalan $ax^p=b$ ni).

Shu munosabat bilan xisoblash matematikasida kator taqribiy usullar ishlab chikilgan. Bu usullar bilan istalgan darajali algebraik yoki transtsendent tenglamalarni berilgan aniqlikda echish mumkin. Shuning uchun taqribiy usullar yuqori darajali tenglamalarni echish uchun asos bo'ladi.

«Berilgan aniqlikdagi taqribiy echim» deganda nimani tushunamiz?

Faraz kilaylik, ξ (1) ning aniq echimi, x esa uning ε aniqlikdagi taqribiy echimi ($0 < \varepsilon < 1$) bo'lsin. U xolda yuqoridagi savolimizning javobi $|\xi - x| \leq \varepsilon$ bo'ladi. Ushbu bobda biz bir noma'lumli algebraik va transtsendent tenglamalarni ba'zi taqribiy echish usullari bilan tanishib chiqamiz.

ILDIZLARNI AJRATISH.

Tenglamalarni taqribiy echish jarayoni ikkita boskichga ajratiladi:

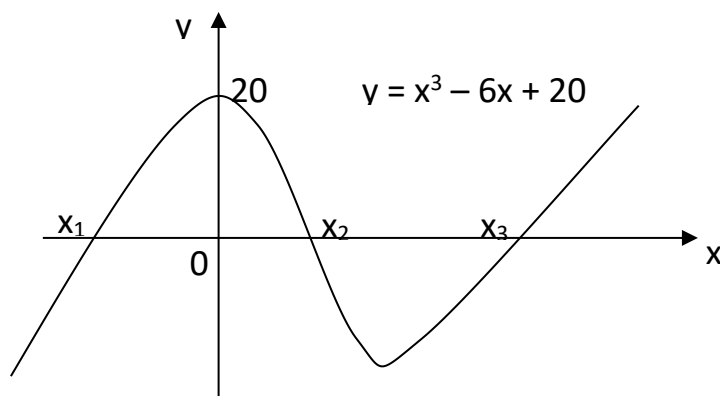
- 1) ildizlarni ajratish;
- 2) ildizlarni berilgan aniqlikda topish.

$[a, b]$ kesmada $f(x) = 0$ tenglamaning ξ dan boshqa ildizi yo'q bo'lsa, ildiz ξ ajratilgan hisoblanadi. Ildizlarni ajratish uchun $[a, b]$ kesmani shunday

kesmachalarga bo'lish kerakki, bu kesmachalarda tenglamaning faqat bitta ildizi bo'lsin. Ildizlarni grafik va analitik usullar bilan ajratish mumkin.

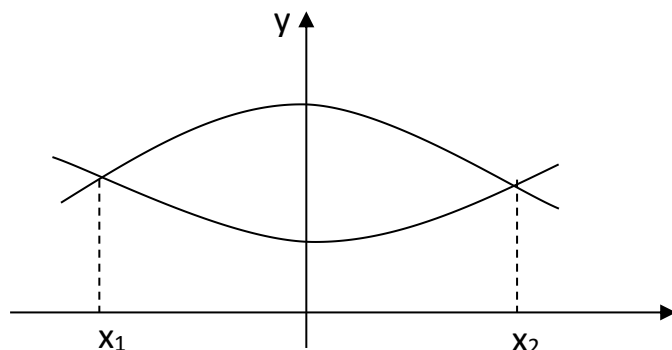
Ildizlarni grafik usulda ajratish. 1-usul. Bu usul juda sodda bo'lib quyidagicha bajariladi. Dekart koordinat tizimida $u=f(x)$ funktsiyaning grafigini chizamiz (bu bizga o'rta maktab dasturidan ma'lum). Shu grafikning Ox uki bilan kesishgan nuqtalari izlanayotgan ildizlar (taqribiy) bo'ladi.

Misol. $x^3-6x^2+20=0$ tenglamaning taqribiy echimlari x_1, x_2, x_3 1-rasmda ko'rsatilgan.



1-rasm. $f(x) = 0$ tenglamani ildizlarni grafik usulda ajratish

2-usul. $f(x) = 0$ tenglamani $f_1(x) = f_2(x)$ ko'rinishda ezib olamiz.



2-rasm. $f_1(x) = f_2(x)$ tenglamani ildizlarni grafik usulda ajratish

Dekart koordinat tizimida $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funktsiyalarning grafiglarini chizamiz. Agar bu egri chiziqlar o'zaro kesishsa, kesishgan nuqtalaridan Ox ukiga tik chiziq (perpendikulyar) o'tkazamiz. Hosil bo'lgan nuqtalar (eki nuqta) taqribiy echimlar bo'ladi. 2-rasmdagi x_1 va x_2 lar (1) tenglamaning taqribiy echimlaridir.

Bu usullar bilan tenglamalar echganda aniqroq echimlar olish uchun grafiglarni iloji boricha aniq chizish va katta masshtab olish lozim bo'ladi. Shunga qaramay grafik usullar bilan ildizlarni yuqori aniqlikda hisoblab bo'lmaydi. Grafik usul bilan tenglamaning ildizlarini biror chegaralangan kesmada aniqlaymiz, ya'ni chizmani istalgancha katta o'lchovda ololmaymiz va

tenglama nechta ildizga ega ekanligiga javob bera olmaymiz. Ildizlarni yuqori aniqlikda topish lozim bo'lsa, boshqa taqribiy usullardan foydalanish kerak.

Ildizlarni analitik usulda ajratish. $f(x)=0$ tenglamaning ildizlarini analitik usulda ajratish uchun oliy matematika kursidan ba'zi teoremlarni isbotsiz keltiramiz.

1-teorema. Agar $f(x)$ funktsiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, kesmaning chekka nuqtalarida turli ishorali qiymatlar qabul kilsa, u xolda $[a, b]$ kesmada $f(x)=0$ tenglamaning juda bulmaganda bitta ildizi yotadi.

2-teorema. Agar $f(x)$ funktsiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz va monoton bo'lib, kesmaning chekka nuqtalarida turli ishorali qiymatlar qabul kilsa, u xolda $[a, b]$ kesmada $f(x)=0$ tenglamaning faqat bitta ildizi yotadi.

3-teorema. Agar $f(x)$ funktsiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lib va kesmaning chekka nuqtalarida turli ishorali qiymatlar qabul kilib, $[a, b]$ kesmaning ichida $f'(x)$ hosilasining ishorasi o'zgarmasa, u xolda $[a, b]$ kesmada $f(x)=0$ tenglamaning faqat bitta ildizi yotadi.

Eslatma. 1) $u=f(x)$ funktsiya berilgan intervalda monoton deyiladi, agar shu intervalga tegishli istalgan $x_2 > x_1$ uchun $f(x_2) \geq f(x_1)$ ($f'(x) \geq 0$) (monoton usuvchi) eki $f(x_2) \leq f(x_1)$ ($f'(x) \leq 0$) (monoton kamayuvchi) bo'lsa.

2) Agar $u=f(x)$ funktsiya berilgan intervalda uzluksiz bo'lib, intervalning xamma nuqtalarida hosilalari mavjud bo'lsa, u xolda funktsiyaning bu intervalda monoton bo'lishi uchun $f'(x) \geq 0$ yoki $f'(x) \leq 0$ tengsizliklarning bajarilishi zarur va etarli.

Oralikni teng yarmiga bo'lish usuli, uning ishchi algoritmi

Faraz kilaylik, $f(x)=0$ tenglamaning biror ξ ildizi $[a, b]$ kesmada ajratilgan bo'lsin. Kesmaning uzunligi $d=b-a$ deb belgilaylik. Tenglamaning ξ echimi $\varepsilon=0,001$ aniqlikda topilsin. ξ ildiz $[a, b]$ ning ichida bo'lganligi $\{a < \xi < b\}$ uchun a ni kami bilan olingan taqribiy ildiz, b ni ortigi bilan olingan taqribiy ildiz deb olishimiz mumkin. Agar $d < 0,001$ bo'lsa masala echilgan hisoblanadi va a hamda b lar $f(x)=0$ tenglamaning berilgan $\varepsilon=0,001$ aniqlikdagi echimlari bo'ladi. Bu xolda taqribiy echim sifatida a va b lardan tashqari bular orasida yotgan istalgan x_0 ($a < x_0 < b$) ni olish mumkin. Taqribiy echim sifatida $x_0 = \frac{a+b}{2}$ ni olish maqsadga muvofik.

Endi faraz kilaylik $d > 0,001$ va $[a, b]$ kesmaning o'rtasida $c=(a+b)/2$ nuqta olingan bo'lsin. U xolda $[a, b]$ kesma uzunliklari $(b-a)/2$ ga teng bo'lgan $[a, c]$ va $[c, b]$ kesmalarga ajraydi. Shu ikki kesmadan kaysi birining chekka nuqtalarida $f(x)$ funktsiya ishorasini o'zgartirsa, shu kesmani olib kolib keyingisini tashlab yuboramiz. Kolgan kesmaning uzunligi $d_1 \leq \varepsilon$ bo'lsa, shu erda tuxtaymiz. Agar shart bajarilmasa, olib qolingan kesmada yuqoridagi

muloxazalarni takrorlaymiz. Ikkiga bo'lish jarayonini kesmaning uzunligi $d_n \leq \varepsilon$ (p -ikkiga bo'lishlar soni) bo'lganiga qadar davom ettiramiz.

Misol. $x^3 - 4x - 1 = 0$ tenglama $\varepsilon = 0,001$ aniqlikda echilsin.

Quyidagi jadvalni tuzamiz

X	-1	0	1	2	2,1	2,2
$f(x)$ ning ishorasi	+	-	-	-	-	+

Jadvaldan kurinyaptiki $[-1; 0]$; $[2,1; 2,2]$ kesmalarda taqribiy echim (1-teorema asosan) bor. Biz uchun qulay kesma $[2,1; 2,2]$. Bunda $f(2,1) = -0,39 < 0$; $f(2,2) = 0,850 > 0$. Bizda $a = 2,1$; $b = 2,2$, Bundan $d = b - a = 0,1 > \varepsilon$. Demak hisoblashni davom ettirish kerak.

$$f(2,11) = -0,046 < 0; \quad f(2,12) = 0,046 > 0$$

Bu erdan $a = 2,11$; $b = 2,12$; $d = b - a = 0,01 > \varepsilon$

Hisoblashni yana davom ettiramiz:

$$f(2,114) = -0,0085 < 0; \quad f(2,115) = 0,0009 > 0$$

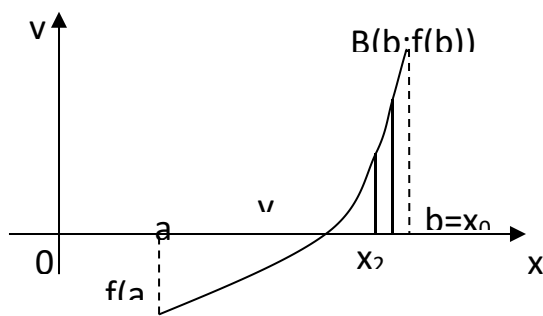
$$a = 2,114; \quad b = 2,115; \quad d = b - a = 2,115 - 2,114 = 0,001 = \varepsilon$$

Qo'yilgan maqsadga erishdik, ya'ni kesmaning uzunligi d avvaldan berilgan aniqlik $\varepsilon = 0,001$ dan katta emas. Bu misolda izlanayotgan taqribiy echim ξ quyidagi oraliqda bo'ladi $2,114 < \xi < 2,115$, ya'ni 2,114 va 2,115 larni taqribiy echim tarzida olish mumkin (ξ aniqlik bilan). Amalda bularning o'rta arifmetigi olinsa echim aniqligi yanada oshadi

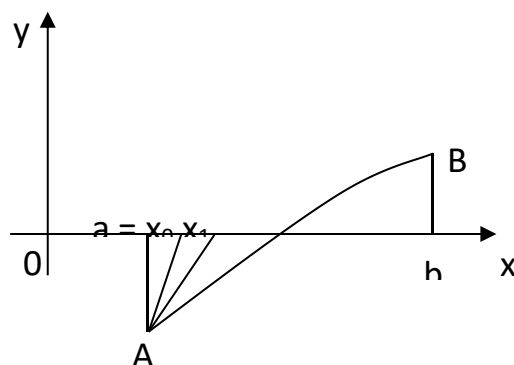
N'YUTON (URINMALAR) USULI

Urinmalar usulini N'yuton usuli deb ham ataydilar. Bu usulni ham ikki xolat uchun kurib chiqamiz.

1- x o l a t . Faraz kilaylik, $f(a) < 0, f(b) > 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0$ yoki $f(a) > 0, f(b) < 0, f'(x) < 0, f''(x) < 0$ (7-rasm).



7- rasm



8 - rasm

$y = f(x)$ egri chiziqqa V nuqtada urinma o'tkazamiz va urinmaning Ox uki bilan kesishgan nuqtasi x_1 ni aniqlaymiz.

Urinmaning tenglamasi quyidagicha:

$$y - f(b) = f'(b) (x-b), \quad (12)$$

bu erda $y=0, x=x_1$ deb, (12) ni x_1 nisbatan echsak,

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \quad (13)$$

Shu muloxazani $[a;x_1]$ kesma uchun takrorlab, x_2 ni topamiz:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (14)$$

Umuman olganda

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (15)$$

Hisoblashni $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$ shart bajarilganda tuxtatamiz.

2- x o l a t . Faraz kilaylik $f(a) < 0, f(b) > 0, f'(x) > 0, f''(x) < 0$ yoki $f(a) > 0, f(b) < 0, f'(x) < 0, f''(x) > 0$ (8- rasm). $y = f(x)$ egri chiziqqa A nuqtada urinma o'tkazamiz, uning tenglamasi:

$$y - f(a) = f'(a) (x - a), \quad (16)$$

Bu erda $y=0, x=x_1$ deyak,

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \quad (17)$$

$[x_1;b]$ kesmadan

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (18)$$

Umuman

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (19)$$

(13) va (17) formulalarni bir-biri bilan solishtirsak, ular bir-birlaridan boshlangich yaqinlashishi (a yoki b) ni tanlab olish bilan farqlanadilar. Boshlangich yaqinlashishni tanlab olishda quyidagi koidadan fondalaniladi; boshlangich yaqinlashish tarzida $[a;b]$ kesmaning shunday chekka (a yoki b) qiymatini olish kerakki, bu nuqtada funktsiyaning ishorasi uning ikkinchi hosilasining ishorasi bilan bir xil bo'lsin.

Misol. $x - \sin x = 0,25$ tenglamaning ildizi $\varepsilon = 0,0001$ aniqlikda urinmalar usuli bilan aniqlansin.

E c h i s h . Tenglamaning ildizi $[0,982; 1,178]$ kesmada ajratilgan (buni tekshirishni kitobxonga xavola kilamiz); bu erda $a=0,982; b=1,178;$

$f(x) = 1 - \cos x; f'(x) = \sin x > 0.$

$[0,982; 1,178]$ kesmada $f(1,178) \cdot f'(x) > 0$, ya'ni boshlangich yaqinlashishda $x_0 = 1,178$. Hisoblashni (13)-(15) formulalar vositasida bajaramiz. Hisoblash natijalari quyidagi 1-jadvalda berilgan.

1-jadval

n	x_n	$- \sin x_n$	$f(x_n) = x_n - \sin x_n - 0,25$	$f'(x_n) = 1 - \cos x_n$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1,178	- 0,92384	0,00416	0,61723	- 0,0065
1	1,1715	- 0,92133	0,00017	0,61123	- 0,0002

2	1,1713	- 0,92127	0,00003	0,61110	- 0,0005
3	1,17125				

Jadvaldan kurinadiki, $x_3 - x_2 = |1,17125 - 1,1713| = 0,00005 < \varepsilon$. Demak echim deb $x = 1,17125$ ni ($\varepsilon = 0,0001$ aniqlikda) olish mumkin.

5-8 – rasmlarga diqqat bilan e'tibor kilsak shuni ko'ramizki, $f(x)=0$ tenglamaning taqribiy echimlarini vatarlar va urinmalar usuli bilan topganda aniq echimga ikki chekkadan yaqinlashib kelinadi. Shuning uchun ikkala usulni bir vaktning o'zida qo'llash natijasida maqsadga tezrok erishish mumkin. Bu usulni kombinatsiyalangan usul deb ataydilar. Kombinatsiyalangan usul yuqorida keltirilgan usullarning umumlashmasi bo'lgani tufayli bu to'g'rida ko'p tuxtalmaymiz.

Takrorlash uchun savollar:

1. Tenglamaning ildizi nima?
2. Algebraik tenglama deganda nimani tushunasiz?
3. Transtsendent tenglama nima?
4. Ildizlarni ajratish deganda nimani tushunasiz?
5. Ildizlarni berilgan aniqlikda topish nima?
6. Kesmani uzunligi nima?
7. Grafik usul deganda nimani tushunasiz?
8. Funktsiyaning intervalda monotonligi nima?
9. Ildizlarni analitik usulda ajratish qanday bajariladi?
10. Oraliqni ikkiga bo'lish usuli qanday shart asosida amalga oshiriladi?