Course name: ***Algorithm of calculating methods***
Course language: **Uzbek**
Instructor: **Muhtorjon Yusupov**

Lecture 3 : *Algorithm of the numerical solution of algebraic and transdental equations. Integrated method. Iteration method.*

Fan nomi: ***Hisoblash usullarini algoritmlash***
Fan o'qituvchisi: **Muhtorjon Yusupov**

3-mavzu: *Algebraik va transendet tenglamalarni yechish. Vatarlar usuli. Qo'shma usul. Iteratsiya usuli.*

3-mavzu. Vatarlar usuli. N’yuton usuli. Qo’shma usul. Iteratsiya usuli.

Reja:

1. Vatarlar usuli.
2. Qo’shma usul
3. Iteratsiya usuli

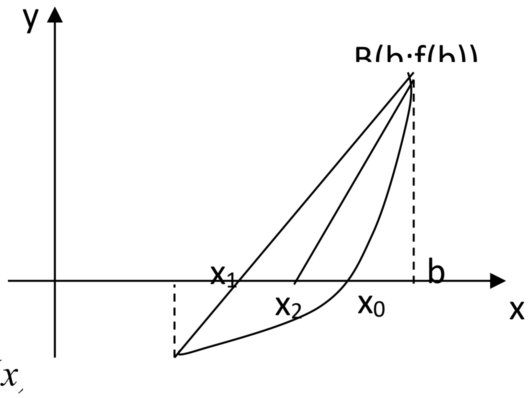
Tayanch iboralar:

Vatar, hosila, n-hosila, taqribiy echim, urinma, egri chiziq, boshlangich yaqinlashish, kombinatsiya, uzluksiz, usuvchi, iteratsiya, teng kuchli.

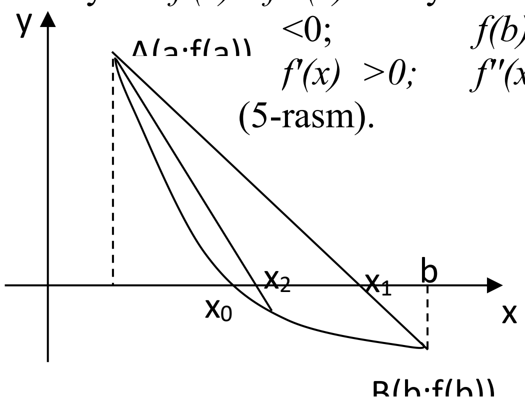
1. VATARLAR USULI

Algebraik va transtsendent tenglamalarni echishda vatarlar usuli keng qo`llanadigan usullardan biridir. Bu usulni ikki xolat uchun kurib chiqamiz.

1-x o l a t . Faraz kilaylik *f(x)* =0 tenglamaning ildizi *[a,b]* kesmada ajratilgan va kesmaning chekka nuqtalarida *f(a) · f(b)* <0 bo`lsin. Bundan tashqari birinchi va ikkinchi hosilalari bir xil ishorali qiymatlarga ega bo`lsin, ya`ni *f'(x) · f ''(x) > 0* yoki *f(a)* <0; *f(b)>0; f'(x) >0; f''(x)>0* (5-rasm).



5- rasm



6- rasm

f(x) =0—tenglamaning aniq echimi, *f(x)* funktsiya grafigining *Ox* uki bilan kesishgan nuqtasi x_0. *A* va *V* nuqtalarni turri chiziq (vatar) bilan tutashtiramiz.

Oliy matematikadan ma`lumki, A va V nuqtalarda (5- racm) utgan to`g’ri chiziqning tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a} \qquad (3)$$

Utkazilgan vatarning *Ox* uki bilan kesishgan nuqtasi x_1 ni taqribiy echim deb qabul kilamiz va uning koordinatasini aniqlaymiz. (3) tenglikda $x=x_1$, $u=0$ deb hisoblab uni x_1 ga nisbatan echamiz:

$$x_1 = a-\frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)} \qquad (4)$$

Izlanayotgan echim x_0 endi $[x_1; b]$ kesmaning ichida. Agar topilgan x_1 echim bizni kanoatlantirmasa yuqorida aytilgan muloxazalarni $[x_1; b]$ kesma uchun takrorlaymiz va x_2 nuqtaning koordinatini aniqlaymiz:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(b - x_1)}{f(b) - f(x_1)} \qquad (5)$$

Agar x_2 ildiz ham bizni kanoatlantirmasa, ya`ni avvaldan berilgan ε aniqlik uchun $|x_2 - x_1| \leq \varepsilon$ shart bajarilmasa, x_z ni hisoblaymiz:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(b - x_2)}{f(b) - f(x_2)} \qquad (6)$$

yoki umumiy xolda

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)} \qquad (7)$$

ya`ni hisoblashni $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$ shart bajarilgunga qadar davom ettiramiz.

Yuqorida keltirilgan formulalarni $f(a) > 0; f(b) < 0; f'(x) < 0; f''(x) < 0$ uchun ham qo`llash mumkin.

2-x o l a t . $f(x)$ funktsiyaning birinchi va ikkinchi hosilalari turli ishorali qiymatlarga ega deb faraz kilaylik, ya`ni $f'(x) \cdot f''(x) < 0$ yoki $f(a) > 0, f(b) < 0, f'(x) < 0, f''(x) > 0$ (6-rasm).

A va *V* nuqtalarni turri chiziq (vatar) bilan tutashtirib uning tenglamasini yozamiz

$$\frac{y - f(b)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - b}{b - a} \qquad (8)$$

Bu tenglamada $y = 0$ va $x = x_1$ deb qabul kilib, uni x_1 ga nisbatan echsak,

$$x_1 = b - \frac{f(a)(b - a)}{f(b) - f(a)} \qquad (9)$$

Topilgan x_1 ni taqribiy echim deb olish mumkin. Agar topilgan x_1 ning aniqligi bizni kanoatlantirmasa, yuqoridagi muloxazani $[a, x_1]$ kesma uchun takrorlaymiz, ya'ni x_2 ni hisoblaymiz:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - a)}{f(x_1) - f(a)} \qquad (10)$$

Agar $|x_2 - x_1| \leq \varepsilon$ shart bajarilsa, taqribiy echim sifatida x_2 olinadi, bajarilmasa $x_3, x_4, \ldots$ lar hisoblanadi, ya`ni

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)} \qquad (11)$$

Xisoblash jarayoni $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$ bulgunga qadar davom ettiriladi.

$f(a) < 0, f(b) > 0, f'(x) > 0, f''(x) < 0$ bo`lgan xol uchun ham taqribiy ildiz (9) – (11) formulalar bilan hisoblanadi. Demak, agar $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ bo`lsa taqribiy echim (4-7) formulalar bilan, $f'(x) \cdot f''(x) < 0$ bo`lsa (9) - (11) formulalar bilan hisoblanadi.

Misol. $x^3 + x^2 - 3 = 0$ tenglama $\varepsilon = 0,005$ aniqlikda vatarlar usuli bilan hisoblansin.

E c h i s h . Ildizlarni ajratsak, 0,5<x<1,5 ga ega bo`lamiz; bu erda *f(0,5)=-2,625<0*; *f(1,5) = 2,600 > 0*; *f'(x)=3x*^{2} *+ 2x;* *f''(x) = 6x +* Kidirilayotgan taqribiy ildiz [*0,5; 1,5*] kesmada ekan. Bu kesmada esa *f'(x) >* *0*; *f''(x) >0.* Demak biz taqribiy ildizni (4) - (7) formulalar yordamida hisoblaymiz (1- xolat). (4) dan x_1 = 1,012 ni, (2,5) dan x_2 = 1,130 ni; (6) dan x_3 = 1,169 ni, (7) dan (n=3) x_3 =1,173 ni topamiz. Bu erda $|x_4 - x_3|$ = 1, 173 - 1,169 = 0,004 < ε. Demak shart 4-kadamda bajarildi. Shuning uchun x_4=1,173 yuqoridagi tenglamaning ε = 0,005 aniqlikdagi ildizi bo`ladi.

Qo'shma usul. Iteratsiya usuli.

1. Qo'shma usul.

Bizga

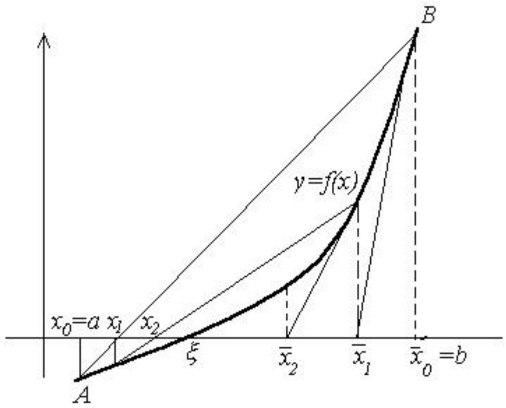
$$f(x)=0 \qquad (1)$$

tenglama berilgan. Bunda

$$f(a)\cdot f(b)<0 \qquad (2)$$

$(a, f(a))$ va $(b, f(b))$ nuqtalardan vatar o'tkazamiz, vatarni abtsissa o'qi bilan kesishish nuqtasini x_1 bilan belgilaymiz. (Vatarlar usuli formulasidan foydalanib). $(b, f(b))$ nuqtadan urinma o'tkazamiz, urinmani abtsissa o'qi bilan kesishish nuqtasini $\bar{x}_1$ bilan belgilaymiz. (Urinmalar formulasidan foydalanib).

$(x_1, f(x_1))$ va $(\bar{x}_1, f(\bar{x}_1))$ vatar o'tkazamiz, abtsissa o'qi bilan nuqtasini x_2 bilan belgilaymiz. $(\bar{x}_1, f(\bar{x}_1))$ nuqtadan urinma o'tkazamiz. Uning abtsissa bilan kesishish nuqtasi $\bar{x}_2$ bilan belgilaymiz, va xakazo shu protsessni davom qildiramiz Yani



$$\begin{cases} x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f(b)-f(x_0)}\cdot(b-x_0); \; x_0 = a \\ \bar{x}_1 = \bar{x}_0 - \dfrac{f(\bar{x}_0)}{f'(\bar{x}_0)}; \qquad \bar{x}_0 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f(\bar{x}_1)-f(x_1)}(\bar{x}_1 - x_1) \\ \bar{x}_2 = \bar{x}_1 - \dfrac{f(\bar{x}_1)}{f'(\bar{x}_1)} \end{cases}$$

....

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f(\bar{x}_n)-f(x_n)}(\bar{x}_n - x_n) \\ \bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \dfrac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)} \end{cases}$$

Bu protsessni $|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon$ yoki $|\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n| \le \varepsilon$ shartini bajarguncha davom qildiramiz. Yuqoridagi formula birlashtiriligan usulning formulasi hisoblanadi. Amaliy jihatdan taqribiy ildiz sifatida $\xi = \frac{\bar{x}_{n+1} + x_{n+1}}{2}$ olinadi.

2. Iteratsiya usuli

Bizdan *f(x)*=0 tenglamaning ildizini aniqlash talab etilsin. Bu tenglamani quyidagi (teng kuchli) ko`rinishda yozamiz

$$x = \varphi(x) \qquad (20)$$

f(x) =0 tenglamani $x = \varphi(x)$ ko`rinishga keltirishni juda engil amallar bilan istalgan vaktda amalga oshirish mumkin. (20) ning ildizi *[a,b]* kesmada ajratilgan bo`lsin. *[a,b]* ning ichida ixtiyoriy *x* nuqtani olamiz ($a \le x_0 \le b$) va bu nuqtani boshlangich (nolinchi) yaqinlashish deb qabul kilamiz. *x* ni (20) ning ung tarafidagi *x* ning o`rniga kuyib, hosil bo`lgan natijani *x* desak,

$$x_1 = \varphi(x_0) \qquad (21)$$

x_1 ni birinchi yaqinlashish buyicha (20) ning ildizi deyiladi. Keyingi yaqinlashishlar kuiidagicha topiladi:

$$x_2 = \varphi(x_1),$$
$$x_3 = \varphi(x_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = \varphi(x_{n-1})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdot$$

Buning natijasida quyidagi ketma-ketlikni to`zamiz

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \qquad (22)$$

Agar (22) ketma-ketlikning limiti mavjud bo`lsa ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$), u xolda *x* (20) ning ildizi bo`ladi. Buning isboti juda sodda. Agar $\varphi(x)$ ni uzluksiz funktsiya desak,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = \varphi(\bar{x})$$

ya`ni $x = \varphi(\bar{x})$ bo`lib, $\bar{x}$ (20) ning ildizi bo`ladi.

Agar (20) ketma-ketlikning limiti mavjud bo`lmasa, u xolda ketma-ket yaqinlashish usulining ma`nosi bo`lmaydi.

Yuqorida aytilganlardan xulosa shuki, biz bu usul bilan *f(x) =0,* [$x=\varphi(x)$] tenglamaning echimini topmokchi bo'lsak, quyidagi ketma-ket bajarilishi lozim bo`lgan jarayonni hisoblashimiz kerak bo`ladi:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \varphi(x_0) \\ x_2 = \varphi(x_1) \\ x_3 = \varphi(x_2) \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = \varphi(x_{n-1}) \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad (23)$$

bu erda $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ ketma-ket yaqinlashishlar; x_0 - boshlangich yaqinlashish; x_1 - birinchi yaqinlashish; x_2 - ikkinchi yaqinlashish va x.k.

(23) jarayon yaqinlashuvchi bo`lishining etarlilik shartlarini quyidagi teorema ifodalaydi (teoremani isbotsiz keltiramiz).

Teorema. $x=\varphi(x)$ *tenglamaning ildizi [a, b] kesmada ajratilgan bo`lib, bu kesmada quyidagi shartlar bajarilsa:*

1) $\varphi(x)$ *funktsiya [a, b] da aniqlangan va differentsiallanuvchi;*
2) *barcha* $x\in[a;b]$ *uchun* $\varphi(x)\in[a;b]$;
3) *barcha* $x\in[a;b]$ *da* $|\varphi'(x)|\le M<1$ *bo`lsa, u xolda* (23) *jarayon* ***yaqinlashuvchi*** *bo`ladi*

Bu erda shuni ta`kidlash lozimki, teoremaning shartlari faqat etarli bo`lib, zaruriy emasdir, ya`ni (23) jarayon bu shartlar bajarilmaganda ham yaqinlashuvchi bo`lishi mumkin. (23) ni hisoblaganimizda, hisoblashni avvaldan berilgan aniqlik uchun quyidagi tengsizlik bajarilgunga qadar davom ettiramiz:

$$|x_n-x_{n-1}|\le\varepsilon \qquad (n=1,2,3,4,\ \dots)$$

Misol. 4x-5lnx =5 tenglama ε =0,0001 aniqlikda ketma-ket yaqinlashish usuli bilan echilsin.

E c h i s h . Tenglamani $\ln x=\frac{4x-5}{5}$ ko`rinishda yozamiz va $y_1=\ln x$; $y_2=\frac{4x-5}{5}$ chiziqlar kesishgan nuqtani aniqlaymiz. Bular $x_0=2,28;$ $x_0=0,57$. Bularni boshlangich yaqinlashish nuqtalari deb olamiz. Berilgan tenglamani $x=1,25(1+\ln x)$ ko`rinishda yozsak, $\varphi(x)=1,25(1+\ln x)$ bo`ladi, bundan, $\varphi'(x)=\frac{1,25}{x}$ . Bu xolda $x_0=2,28$ uchun ketma-ket yaqinlashish jarayoni yaqinlashuvchi bo`ladi:

$$\varphi'(x)=\frac{1,25}{x}<1$$

Hisoblash natijalari quyidagi 2- jadvalda keltirilgan:

2-jadval

(1)	(2)	(3)
x	ln(1) +1	1,25(2)
2,28	1,82418	2,28022
28022	1.82427	2,28034
2,28034	1,82432	2,28040
2,28040	1,82435	28044
2,28044	1,82437	2,28046

Boshlangich yaqinlashish x_0 =0,57 atrofida jarayon yaqinlashuvchi bo`lmaydi, chunki

$$\varphi'(x) = \frac{1,25}{x_0} = \frac{1,25}{0,57} > 1$$

Bu xolda berilgan tenglamani $x = e^{0,8 \quad x-1}$ ko`rinishda yozib, hisoblashni davom ettirish kerak.

Takrorlash uchun savollar:

1. Tenglamaning aniq echimi nima?
2. To`g'ri chiziqning tenglamasini yozing.
3. Izlanayotgan echim nima?
4. Taqribiy echim nima?
5. Vatarlar usuli qanday shart asosida amalga oshiriladi?
6. Urinmalar usuli qanday shart asosida amalga oshiriladi?
7. Urinmaning tenglamasini yozing.
8. Boshlangich yaqinlashish nima?
9. Urinmalar usulining 1-xolati qanday?
10. Urinmalar usulining 2-xolati qanday?
11. Teng kuchli tenglamalar nima?

Ketma-ket yaqinlashish usuli qanday shart asosida amalga oshiriladi?