



Course name: *Algorithm of calculating methods*

Course language: **Uzbek**

Instructor: **Muhtorjon Yusupov**

Lecture 4 : *Algorithm of numerical solution of linear algebraic and transdental equations systems. Gauss method.*

Fan nomi: *Hisoblash usullarini algoritmlash*

Fan o'qituvchisi: **Muhtorjon Yusupov**

4-mavzu: *Algebraik va transtsendent tenglamalar sistemalarini to'g'ri va iteratsiya usullari bilan yechish usullarini algoritmlash (Gauss usuli).*

4-mavzu. Algebraik va transtsendent tenglamalar sistemalarini to'g'ri va iteratsiya usullari bilan yechish usullarini algoritmlash (Gauss usuli).

Reja:

1. Algebraik va transtsendent tenglamalar sistemalarini to'g'ri va iteratsiya usullari
2. Gauss usuli.
3. Bosh elementlar usuli

Tayanch iboralar:

Vektor, matritsa, skalyar ko'paytma, vektorning moduli, birlik matritsa, aniq usul, iteratsion tizim, birinchi boskich, ikkinchi boskich.

1. Algebraik va transtsendent tenglamalar sistemalarini to'g'ri va iteratsiya usullari

Nazariy va amaliy matematikaning ko'pgina masalalari chiziqli algebraik tenglamalar tizimini echishga olib keladi.

Chiziqli algebraik tenglamalarni echish asosan ikki usulga - aniq va iteratsion usullarga bo'linadi.

Aniq usul deganda shunday usul tushuniladiki, uning yordamida chekli miqdordagi arifmetik amallarni aniq bajarish natijasida masalaning aniq echimini topish mumkin bo'ladi. Xammaga ma'lum bo'lgan Kramer koidasi aniq usulga misol bula oladi. Lekin, Kramer koidasi amalda juda kam qo'llaniladi, chunki bu usul bilan p - tartibli chiziqli algebraik tenglamalar tizimini echganda nixoyatda ko'p arifmetik amallarni bajarishga to'g'ri keladi.

Biz hisoblash uchun tejamli bo'lgan Gauss va bosh elementlar aniq usullarini ko'rib chiqamiz. Bular noma'lumlarni ketma-ket yuqotish goyasiga asoslangan.

Iteratsion (ketma-ket yaqinlashish) usul shu bilan xarakterlanadiki, bu usulda chiziqli algebraik tenglamalar tizimining echimi ketma-ket yaqinlashishlarning limitidek topiladi.

Iteratsion usullarni qo'llayotganda faqat ularning yaqinlashishlarigina emas, balki yaqinlashishlarning tezligi ham katta ahamiyatga ega.

Bu usullar ayrim tizimlar uchun juda tez yaqinlashib, boshqa tizimlar uchun sekin yaqinlashishi yoki umuman yaqinlashmasligi ham mumkin. Shuning uchun ham iteratsion usullarni qo'llayotganda tizimni avval tayyorlab olish kerak. Ya'ni, berilgan tizimni unga teng kuchli bo'lgan shunday tizimga almashtirish kerakki, hosil bo'lgan tizim uchun tanlangan usul tez yaqinlashsin.

Tizimdagi tenglamalardan noma'lumlarni ketma-ket yo'qotishni ikki yo'l bilan amalga oshirish mumkin:

- a) tenglamalarning kerakli kombinatsiyalarini tuzish;

b) almashtirishning har bir kadamida tizim matritsasining biror elementini yoki biror ustundagi diagonal elementning ostidagi barcha elementlarini nolga aylantirish maqsadida bu matritsani maxsus ravishda tanlab olingan matritsaga ko'paytirish.

Har ikkala xolda ham e'tibor shunga karatilishi kerakki, almashtirishlar natijasida berilgan tizim unga teng kuchli bo'lgan tizimga almashishi hamda sodda ko'rinishga ega bo'lishi lozim.

GAUSS USULI

Gaussning noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish usuli chiziqli algebraik tenglamalar tizimini echish usullari ichida eng universal va eng samaralisidir. Soddalik uchun turtta noma'lumli turtta chiziqli tizimni echishning Gauss usulini kurib chiqamiz.

Ushbu tizim berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3; \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4; \end{cases} \quad (7)$$

bu erda x_i ($i=1,4$) - noma'lum sonlar, a_{ij} ($j = 1,4$) va b_i ($i=1,4$) - ma'lum koeffitsientlar. Qulaylik uchun $a_{15} = b_1$, $a_{25} = b_2$, $a_{35} = b_3$, $a_{45} = b_4$ deb olamiz.

Gauss usulining tulik tavsifiga utamiz. Birinchi kadamning etakchi elementi deb ataladigan a_{11} koeffitsientni noldan farqli deb hisoblamiz. (7) dagi birinchi tenglamaning xamma xadlarini a_{11} ga bo'lib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15} \quad (8)$$

Bu erda

$$b_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j = 2,3,4,5)$$

(8) tenglikdan foidalanib (7) tizimning ikkinchi, uchinchi va turtinchi tenglamalaridan x_1 noma'lumni iukotamiz. Buning uchun (8) tenglamani a_{21} , a_{31} va a_{41} ga ko'paitirib natijani mos ravishda tizimning ikkinchi, uchinchi va turtinchi tenglamalaridan airish kerak. U xolda uch noma'lumli quyidagi tizimga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = a_{25}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 = a_{35}^{(1)} \\ a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 = a_{45}^{(1)} \end{cases} \quad (9)$$

bu erda

$$a_{ij} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j} \quad (i = 2,3,4, \quad j=2,3,4,5) \quad (10)$$

Endi shu tizimni o'zgartirishga kirishamiz.

Ikkinchi kadamni bajarishga utishdan oldin ikkinchi kadamning etakchi elementi deb ataladigan $a_{22}^{(1)}$ elementni noldan farqli deb faraz qilamiz (aks xolda tenglama-larning urnini tegishli ravishda almashtirish lozim). (9) tizimning birinchi tenglamasini $a_{22}^{(1)}$ ga bo'lamiz, u xolda

$$x_2 + b_{23}^{(1)}x_3 + b_{24}^{(1)}x_4 = b_{25}^{(1)} \quad (11)$$

bu erda

$$b_{2j}^{(1)} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (j = 3, 4, 5)$$

Yuqoridagiga o'xshash x_2 ni yo'qotsak,

$$\begin{cases} a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 = a_{35}^{(2)} \\ a_{43}^{(2)}x_3 + a_{44}^{(2)}x_4 = a_{45}^{(2)} \end{cases} \quad (12)$$

tizimga ega bo'lamiz, bu erda

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)}b_{2j}^{(1)} \quad (i = 3, 4; \quad j = 3, 4, 5) \quad (13)$$

(12) ning birinchi tenglamasini $a_{33}^{(2)}$ ga bo'lamiz, u xolda

$$x_3 + b_{34}^{(2)}x_4 = b_{35}^{(2)}$$

bo'ladi, bu erda

$$b_{34}^{(2)} = \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}, \quad b_{35}^{(2)} = \frac{a_{35}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$$

Bu tenglama yordamida (12) tizimning ikkinchi tenglamasidanni yo'qotib, quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz:

$$a_{44}^{(3)}x_4 = a_{45}^{(2)}$$

bu erda

$$a_{4j}^{(3)} = a_{4j}^{(2)} - a_{43}^{(2)}b_{3j}^{(2)} \quad (j = 4, 5) \quad (14).$$

Shunday kilib, (7) tizimni uchburchak matritsali o'ziga teng kuchli bo'lgan quyidagi tizimga keltirdik:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15}; \\ x_2 + b_{23}^{(1)}x_3 + b_{24}^{(1)}x_4 = b_{25}^{(1)}; \\ x_3 + b_{34}^{(1)}x_4 = b_{35}^{(1)}; \\ a_{44}^{(1)}x_4 = a_{45}^{(1)}; \end{cases} \quad (15)$$

Bu erdan ketma-ket quyidagilarni aniqlaymiz:

$$\begin{cases} x_4 = \frac{a_{45}^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}; \\ x_3 = b_{35}^{(2)} - b_{34}^{(2)}x_4; \\ x_2 = b_{25}^{(1)} - b_{24}^{(1)}x_4 - b_{23}^{(1)}x_3; \\ x_1 = b_{15} - b_{14}x_4 - b_{13}x_3 - b_{12}x_2. \end{cases} \quad (16)$$

Shunday kilib, (7) tizimni echish ikki boskichdan iborat:

birinchi boskich - to'g'ri yo'l - (7) tizimni (15) uchburchak ko'rinishiga keltirish;

ikkinchi boskich - teskari yo'l - noma'lumlarni (16) formulalar yordamida aniqlash.

Kulda hisoblayotganda xatoga yo'l kuymaslik uchun kisoblash jarayonini tekshirish ma'kuldir. Buning uchun biz ushbu

$$a_{i,n+2} = \sum_{j=1}^n a_{ij} + b_i, \quad (i = \overline{1, n})$$

yig'indidan foydalanamiz.

Agar satr elementlari ustida bajarilgan amallarni kar bir satrdagi tekshiruvchi yig'indi ustida ham bajarsak va hisoblashlar xatosiz bajarilgan bo'lsa, u xolda tekshiruvchi yig'indilardan tuzilgan ustunning har bir elementi moe ravishda almashtirilgan satrlar elementlarining yig'indisiga teng bo'ladi. Bu xol esa birinchi boskich (turri yurish) ni tekshirish uchun xizmat kiladi. Ikkinchi boskich (teskari yurish) da esa, tekshiruv $\bar{x}_j = x_j + 1 \quad (j=1,4)$ larni topish bilan bajariladi.

Tenglamalar tizimini kulda echilganda hisoblashlarni quyidagi 1-jadvalda ko'rsatilgan Gaussning ixcham tarxi buyicha bajarish ma'kuldir. (Jadvalda soddalik uchun turtta tenglamalar tizimini echish tarxi keltirilgan.)

1.-jadval

x_1	x_2	x_3	x_4	ozod xadlar	Σ	tarx qismlari
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	b_1	a_{12}	A
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	b_2	a_{26}	
a_{31}	a_{33}	a_{33}	a_{34}	b_3	a_{36}	
a_{41}	a_{44}	a_{44}	a_{44}	b_4	a_{46}	
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	
1	$\frac{a_{12}}{a_{11}}$	$\frac{a_{13}}{a_{11}}$	$\frac{a_{14}}{a_{11}}$	$\frac{b_2}{b_{11}}$	$\frac{a_{16}}{a_{11}}$	
\dots	$a_{22}^{(1)}$ $a_{32}^{(1)}$ $a_{42}^{(1)}$ \dots 1	$a_{23}^{(1)}$ $a_{33}^{(1)}$ $a_{43}^{(1)}$ \dots $\frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}}$ a_{22}	$a_{24}^{(1)}$ $a_{34}^{(1)}$ $a_{44}^{(1)}$ \dots $\frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}}$ a_{22}	$b_2^{(1)}$ $b_3^{(1)}$ $b_4^{(1)}$ \dots $\frac{b_2^{(1)}}{b_{22}}$ b_{22}	$a_{26}^{(1)}$ $a_{36}^{(1)}$ $a_{46}^{(1)}$ \dots $\frac{a_{26}^{(1)}}{a_{22}}$ a_{22}	A ₁
\dots	\dots	$a_{33}^{(2)}$ $a_{43}^{(1)}$ \dots 1	$a_{34}^{(2)}$ $a_{44}^{(2)}$ \dots $\frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}}$ a_{33}	$b_3^{(2)}$ $b_4^{(2)}$ \dots $\frac{b_3^{(2)}}{a_{33}}$ a_{33}	$a_{36}^{(2)}$ $a_{46}^{(2)}$ \dots $\frac{a_{36}^{(2)}}{a_{33}}$ a_{33}	
\dots	\dots	\dots	$a_{44}^{(3)}$ \dots 1	$b_4^{(2)}$ \dots $\frac{b_4^{(2)}}{a_{44}}$ a_{44}	$a_{46}^{(3)}$ \dots $\frac{a_{46}^{(3)}}{a_{44}}$ a_{44}	A ₃
1	1	1	1	x_4 x_3 x_2 x_1	\bar{x}_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1	

Misol. Quyidagi tizim Gauss usuli bilan echilsin

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 6; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3; \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = -8; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 11 \end{cases}$$

Tizimni echish jarayoni quyidagi 2- jadvalda keltirilgan.

						2-jadval
x_1	x_2	x_3	x_4	Ozod xadlar	Σ	Tarx qismlari
1	1	-2	1	6	7	A
2	1	1	-1	3	6	
-1	-3	-1	1	-8	-12	
1	2	-3	2	11	13	
...	
1	1	-2	1	6	7	
	-1	5	-3	-9	-8	A ₁
	-2	-3	2	-2	-5	
	1	1	1	5	8	
...	
	1	-5	3	9	8	
		-13	8	16	11	A ₂
		6	-2	-4	0	
		
		1	$-\frac{8}{13}$	$-\frac{16}{13}$	$-\frac{11}{13}$	
			$-\frac{22}{13}$	$-\frac{44}{13}$	$-\frac{66}{13}$	A ₃
			1	2	3	V
		1		0	1	
	1			3	4	
1				1	2	

Shunday kilib,

$$x_1=1; x_2=3; x_3=0; x_4=2$$

echimiga ega buldik.

BOSH ELEMENTLAR USULI

Gauss usulida etakchi elementlar doim ham noldan farqli bulavermaydi. Ba`zan esa ular nolga yaqin sonlar bo`lishi mumkin; bunday sonlarga bo`lganda katta absolyut xatoga ega bo`lgan sonlar hosil bo`ladi. Buning natijasida taqribiy echim aniq echimdan sezilarli darajada chetlashib ketadi.

Hisoblashda bunday chetlashishdan kutilish uchun Gauss usuli bosh elementni tanlash yuli bilan qo`llaniladi. Bu usulning Gauss usulining ixcham tarxidan farqi quyidagidan iborat. Faraz kilaylik, noma`lumlarni yo`qotish jarayonida ushbu tizimga egamiz:

bu erda $m_i = a_{iq}/a_{pq}$; barcha $i \neq p$ lar uchun a_{pq} — bosh element. Jadvaldan quyidagi echimni xosil kilamiz:

$$\begin{aligned}x_1 &= 1,04059; & x_2 &= 0,98697; \\x_3 &= 0,93505; & x_4 &= 0,88130.\end{aligned}$$

Takrorlash uchun savollar:

1. Vektor nima?
2. Matritsa nima?
3. Skalyar ko`paytma nima?
4. Vektorning uzunligi deganda nimani tushunasiz?
5. Kvadrat matritsa nima?
6. Matritsani vektorga ko`paytmasi nima?
7. Matritsalarini bir-biriga ko`paytmasi qanday bajariladi?
8. Teskari matritsa nima?
9. Birlik matritsa nima?
10. Gauss usuli nima?
11. Bosh elementar usuli nima?