Course name: ***Algorithm of calculating methods***
Course language: **Uzbek**
Instructor: **Muhtorjon Yusupov**

Lecture 5 : *Algorithm of numerical solution of linear algebraic and transendent equations systems. Iteration and Seidel Methods.*

Fan nomi: ***Hisoblash usullarini algoritmlash***
Fan o'qituvchisi: **Muhtorjon Yusupov**

5-mavzu: *Algebraik va transtsendent tenglamalar sistemalarini to'g'ri va iteratsiya usullari bilan yechish usullarini algoritmlash (*Yakobi va Zeydel metodlari).

5-mavzu. Iteratsion (Yakobi va Zeydel) usullar.

Reja:

1. Iteratsion usullarning yaqinlashish jarayoni shartlarini o'rganish. Statsionar iteratsion usullarning yaqinlashish jarayonini zaruriy va yetarli shartlari.
2. Yakobi usuli.

Tayanch iboralar:

Iteratsiya, statsonar, rekkurent, nostatsionar, xatolik, parametr, empirik, boshlangich yaqinlashish, diogonal elementlar, oshkor usul.

1. Iteratsion usullarning yaqinlashish jarayoni shartlarini o'rganish. Statsionar iteratsion usullarning yaqinlashish jarayonini zaruriy va yetarli shartlari.

Bugunda turli tamoyil (printsip)larga asoslangan juda ko`plab iteratsion usullar mavjud. Umuman, bu usullarning, o`ziga xos tomonlaridan biri shundan iboratki, yo'l qo'yilgan xatoliklari har qadamda to`g'rilanib boradi. Aniq usullar bilan ishlayotganda, agar biror kadamda xatoga yo'l qo'yilsa, bu xato oxirgi natijaga ham ta`sir qiladi. Yaqinlashuvchi iteratsion jarayonning biror kadamida yo`l qo`yilgan xatolik esa faqat bir necha iteratsiya qadamini ortikcha bajarishgagina olib keladi xolos. Biror kadamda yo`l qo`yilgan xatolik keyingi kadamlarda to`zatilib boriladi. Boz ustiga bu usullarning hisoblash tartibi sodda bo`lib, ularni EHM larda hisoblash qulaydir. Lekin har bir iteratsion usulning qo`llanish soxasi chegaralangandir. CHunki iteratsiya jarayoni berilgan tizim uchun o`zoklashi-shi yoki shuningdek, sekin yaqinlashishi mumkinki, buning okibatida amalda echimni konikarli aniqlikda topib bo`lmaydi.

Shuning uchun ham iteratsion usullarda faqat yaqinlashish masalasigina emas, balki yaqinlashish tezligi masalasi ham katta axamiyatga egadir. Yaqinlashish tezligi dastlabki yaqinlashish vektorining qulay tanlanishiga ham borlikdir.

Bu paragrafda avval iteratsion usullarning umumiy xarakteristikasini kurib chiqamiz, so`ngra esa hisoblash amaliyotida keng qo`llaniladigan iteratsion usullarni keltiramiz.

Yuqorida kayd etilganidek, iteratsion usullar tizimning izlangan x echimiga yaqinlashadigan y_0, y_1, y_2, … iteratsion ketma-ketliklarni kurishga asoslangan. Har bir shunday usul navbatdagi y_{k+1} yaqinlashishni avvalgilari yordamida hisoblashga imkon beradigan iteratsion formulalar bilan xarakterlanadi. eng sodda xolda y_{k+1} ni hisoblashda faqat bitta avvalgi

y_k iteratsiyadan foydalaniladi. Bunday usullar bir kadamli deyiladi. Bir kadamli usullar uchun iteratsion formulani quyidagi

$$B_{k+1}\frac{y_{k+1}-y_k}{\tau_{k+1}}+Ay_k=f \qquad (17)$$

standart kanonik ko\`rinishda yozish qabul kilingan; bunda $\tau_{k+1}$ - iteratsion parametrlar ($\tau_{k+1}>0$), $B_{k+1}$ – yordamchi maxsusmas matritsalar. Agar $\tau$ va B lar k+1 indeksga bog'liq bo\`lmasa, ya\`ni (17) formula ixtiyoriy k lar uchun bir xil ko\`rinishga ega bo\`lsa, u xolda bu iteratsion usul s t a t s i o n a r u s u l deyiladi. Statsionar usullar hisoblash jarayonini tashkil etish nuqtai nazaridan soddadir. Ammo nostatsionar usullar boshqa ustunliklarga ega: ular $\{\tau_{k+1}\}$, $\{B_{k+1}\}$ ketma-ketliklarni tanlash bilan boglangan kushimcha «erkinlik darajasiga» ega. Bundan y_k iteratsiyalar tizimning *x* echimiga yaqinlashish tezligini oshirishda foydalanish mumkin.

(17) iteratsion formula yordamida navbatdagi y_{k+1} yaqinlashishni topish ushbu

$$B_{k+1}\, y_{k+1} = F_{k+1} \qquad (18)$$

tenglamalar tizimini echishni talab etadi. Bunda

$$F_{k+1} = (B_{k+1} - \tau_{k+1} A)\, y_k + \tau_{k+1} f$$

Shunday hisoblashni kar bir kadamda bajarishga turri keladi. B_{k+1} matritsa sifatida birlik B_{k+1} = E matritsa olsak, iteratsion ketma-ketlik xadlarini hisoblash uchun eng sodda tarxga ega bula-miz. Bu xolda (17) formula ketma-ketlikning navbatdagi y_{k+1} xadini uning avvalgi y_k xadi orqali oshkor ifodalash imkonini beradi:

$$y_{k+1} = y_k - \tau_{k+1} A\, y_{k+1} + \tau_{k+1} f \qquad (19)$$

Ana shunday rekkurent formulaga asoslangan iteratsion usullar oshkor usullar deyiladi.

Oshkormas usullar ($B_{k+1} \neq$ E orasida B_{k+1} matritsani uchburchakli kilib tanlanadigan usullar eng ko\`p tarqalgan. Bu kolda navbatdagi y_{k+1} iteratsiyani topish uchun y_{k+1} ning komponentlarini (18) uchburchakli tizimdan birin-ketin Gauss usulining teskari yurishiga kilinganidek topishga keltiriladi.

Qandaydir iteratsion usulning qo\`llanishi $\{y_k\}$ ketma-ketlik tizimning *x* echimiga yaqinlashishni bildiradi:

$$\lim_{k\to\infty} y_k = x \qquad (20)$$

(20) tenglik quyidagini anglatadi:

$$\sqrt{\left(y_1^{(k)}-x_1\right)^2+\left(y_2^{(k)}+x_2+\ldots+\left(y_n^{(k)}-x_n\right)\right.}\to 0 \qquad (21)$$

(21) dan kurinadiki, *u* vektorlar ketma-ketligining *x* vektorga yaqinlashishining zaruriy va etarli sharti kar bir komponentning yaqinlashuvchiligidan iborat:

$$\lim_{k\to\infty} y_1^{(k)} = x_i, \qquad i = 1,2,...,n$$

Ushbu ayirma $z_k = y_k - x$ xatolik deyiladi. y_k ni $y_k = x + z_k$ ko`rinishda yozib va (17) ga kuyib, xatolik uchun,

$$B_{k+1}\frac{z_{k+1}-z_k}{\tau_{k+1}} + Az_k = 0 \qquad (22)$$

iteratsion formulami hosil kilamiz. (17) dan farqli ularok, u tizimning ung tomoni (f) ni o`z ichiga olmaydi, ya`ni bir jinslidir. (20) yaqinlashishni talab etish z_k ning nolga intilishi lozimligini anglatadi:

$$\lim_{k\to\infty} z_k = 0 \qquad (23)$$

Har bir iteratsion usul yaqinlashuvchiligining etarlilik shartlari A, B_{k+1} matritsalar va τ_{k+1} iteratsion parametrlar kanoatlantirishi lozim bo`lgan ko`rinishda ifodalanadi. Ulardan ba`zilarini, ayniksa, iteratsion parametrlarni optimal tanlashga oid shartlarni tekshirish kiyin. Natijada hisoblashlarni bajarayotganda iteratsion parametrlarni ko`pincha tajriba yuli bilan (empirik) tanlashga turri keladi.

Yakobi usuli

Faraz qilaylik,

$$Ax = b \qquad (24)$$

tizim biror usul bilan

$$x + Cx + f \qquad (25)$$

ko`rinishga keltirilgan bo`lsin, bu erda *S* — qandaydir matritsa, *f* - vektor ustun. Dastlabki yaqinlashish vektori $x^{(0)}$ biror usul bilan (masalan, $x^{(0)} = 0$) topilgan bo`lsin. Agar keyingi yaqinlashishlar

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + f \qquad (k=0,1,2, ...)$$

rekkurent formula yordamida topilsa, bunday usul oddiy iteratsiya usuli deyiladi.

Agarda *S* matritsa elementlari

$$\sum_{i=1}^{n} |C_{ij}| \le a \le 1 \qquad (i = 1,2,...,n) \qquad (26)$$

va

$$\sum_{i=1}^{n} |C_{ij}| \le \beta \le 1 \qquad (j = 1,2,...,n) \qquad (27)$$

shartlardan birortasini kanoatlantirsa, u xolda iteratsion jarayon berilgan tenglamaning x echimiga ixtiyoriy boshlangich $x^{(0)}$ vektorda yaqinlashishi isbotlangan, ya`ni

$$x = \lim_{k \to \infty} x^{(k)}$$

Shunday kilib, tizimning aniq echimi cheksiz kadamlar natijasida -hosil qilinadi va hosil kilingan ketma-ketlikning ixtiyoriy vektori taqribiy echimni beradi. Bu taqribiy echimning xatoligini quyidagi formulalardan biri orqali ifodalash mumkin:

$$\left(x_i - x_i^{(k)} \right| \le \frac{\alpha}{1-\alpha} \max_{j=1,2,\ldots n} \left| x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)} \right| \qquad (28)$$

agarda (26) shart bajarilsa, yoki

$$\left| x_i - x_i^{(k)} \right| \le \frac{\beta}{1-\beta} \sum_{j=1}^{n} \left| x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)} \right| \qquad (29)$$

agarda (27) shart bajarilsa. Bu baxolarni moc ravishda quyidagicha kuchaytirish mumkin:

$$m\left(x_i - x_i^{(k)} \right) \le \frac{\alpha}{1-\alpha} \max \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right|$$

eki

$$\sum_{j=1}^{n} \left| x_i - x_i^{(k)} \right| \le \frac{\beta}{1-\beta} \sum_{j=1}^{n} \left| x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)} \right|$$

Iteratsion jarayonlarni yuqoridagi baxolar oldindan berilgan aniqlikni kanoatlantirganda tugallaydilar.

Boshlangich $x^{(0)}$ vektor, umuman olganda, ixtiyoriy tanlanishi mumkin. Ba`zan $x^{(0)} = f$ deb olishadi. Ammo $x^{(0)}$ vektorning komponentlari sifatida noma`lumlarning ko`pol taxminlarda aniqla-ngan qiymatlari olinadi.

(24) tizimni (25) ko`rinishga keltirishni bir necha xil usullarda amalga oshirish mumkin. Faqat (26) yoki (27) shartlardan birortasining bajarilishi lozim. Shunday usullardan ikkitasiga tuxtalamiz.

"Birinchi usul. Agarda *A* matritsaning diagonal elementlari noldan farqli bo`lsa, ya`ni

$$a_{ii} \neq 0 \qquad (I=1,2,\ldots, n)$$

u xolda berilgan tizimni

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n\right) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{22}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n\right) \\ \ldots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1 - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}\right) \end{cases} \qquad (30)$$

ko`rinishda yozish mumkin. Bu xolda *S* matritsa elementlari quyida-gicha aniqlanadi:

$$C_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \; (i \neq j), \quad C_{ii} = 0$$

hamda (26) va (27) shartlar mos ravishdaquyidagi ko`rinishni qabul kiladi:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \leq a < 1 \qquad (i = 1,2,...,n) \qquad (31)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \leq \beta < 1 \qquad (j = 1,2,...,n) \qquad (32)$$

(31) va (32) tengsizliklar A matritsaning diagonal elementlari

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \qquad (i = 1,2,...,n) \qquad (33)$$

shartlartlarni kanoatlantirganda urinli bo`ladi.

Ikkinchi usul. Bu usulni quyidagi misol orqali namoyish kilamiz.

Umuman olganda, har qanday keltirilmagan matritsali tizim uchun yaqinlashuvchi iteratsion usullar mavjud, ammo ularning barchasi kisoblash uchun qulay emas.

Agarda iteratsiya usuli yaqinlashuvchi bo`lsa, u xolda bu usul yuko-rida kurilgan usullardan quyidagi afzalliklarga ega bo`ladi:

1. Iteratsion jarayon tezrok yaqinlashsa, ya`ni tizimning echimini aniqlash uchun p dan kamrok iteratsiya talab kilinsa, u xolda vaktdan yutiladi, chunki arifmetik emallar soni p^2 ga mutanosib (proportsional) (Gauss usuli uchun esa bu son p^3 ga mutanosib).

Yaxlitlash xatoliklari iteratsiya usulida natijaga kamrok ta`-sir etadi. Bundan tashqari iteratsiya usuli o`z xatoligini to`g’rilab boruvchi usuldir.

Iteratsiya usuli tizimning muayyan koeffitsientlari nolga teng bo`lgan kolda juda ham qulaylashadi. Bunday tizimlar xususiy hosilali differentsial tenglamalarni echganda ko`prok uchraydi.

Iteratsiya jarayonida bir xil turdagi amallar bajariladi, bu esa eX.M uchun programmalashtirishni osonlashtiradi.

1- misol. Quyidagi tizim oddiy iteratsiya usuli bilan echilsin:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 6 \\ -x_1 + 25x_2 - x_3 - 5x_4 - 2x_5 = 11 \\ 2x_1 + x_2 - 20x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -19 \\ x_2 - x_3 + 10x_4 - 5x_5 = 10 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 - 20x_5 = -32 \end{cases}$$

E c h i s h . Birinchi usulda aytilganidek, bu tizimning tenglamalarini mos ravishda 10, 25, - 20, 10, 20 larga bo`lib, quyidagi ko`rinishda yozib olamiz:

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}6 - 0{,}1x_2 + 0{,}3x_3 + 0{,}2x_4 - 0{,}1x_5 \\ x_2 = 0{,}44 + 0{,}04x_1 - 0{,}04x_3 + 0{,}2x_4 + 0{,}08x_5 \\ x_3 = 0{,}95 + 0{,}1x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}1x_4 - 0{,}15x_5 \\ x_4 = 1 - 0{,}1x_2 + 0{,}1x_3 + 0{,}5x_5 \\ x_5 = 1{,}6 + 0{,}05x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}05x_3 + 0{,}1x_4 \end{cases}$$

bu erda (31) shart bajariladi. Xakikatan ham,

$$\sum_{j=1}^{5}|C_{1j}| = 0{,}3 < 1; \qquad \sum_{j=1}^{5}|C_{2j}| = 0{,}28 < 1;$$

$$\sum_{j=1}^{5}|C_{3j}| = 0{,}41 < 1; \qquad \sum_{j=1}^{5}|C_{4j}| = 0{,}5 < 1;$$

$$\sum_{j=1}^{5}|C_{5j}| = 0{,}3 < 1;$$

Dastlabki yaqinlashish $x^{(0)}$ sifatida ozod xadlar ustuni (0,6; 0,44; 0,95; 1; 1,6) ni olib keyingi yaqinlashishlarni topamiz:

$x_1^{(1)} = 0{,}6 - 0{,}1x_2^{(0)} + 0{,}3x_3^{(0)} + 0{,}2x_4^{(0)} - 0{,}1x_5^{(0)} =$

$0{,}6 - 0{,}1 \cdot 0{,}44 + 0{,}3 \cdot 0{,}95 + 0{,}2 \cdot 1 - 0{,}1 \cdot 1{,}6 = 0.881$

$x_2^{(1)} = 0{,}44 + 0.04 \cdot 0{,}6 - 0{,}04 \cdot 0{,}95 + 0{,}2 \cdot 1 + 0{,}08 \cdot 1{,}6 = 0{,}754$

Shunga o`xshash $x_3^{(1)} = 0{,}892$; $x_4^{(1)} = 1{,}851$; $x_5^{(1)} = 1{,}7$ Hisoblashlarning davomini 1- jadvalda keltiramiz:

1-jadval

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$	$x_5^{(k)}$
0	0,6	0,44	0,95	1	1,6
1	0.881	0,754	0.892	1,851	1,72
2	0.9884	0.9482	1,0029	1,9147	1,9859
3	0,9904	0,9814	0,9908	1,9939	1,9854
4	0,99944	0.99753	0,99789	1,99364	1.99897
5	0,99839	0,99865	0,99929	1,99954	1,99970
6	0.99986	0,99989	0,99977	1,99976	1.99960
7	0,999934	0,999920	1,000018	1,999788	1,999947
8	0.999974	0,999951	0,999976	2,000042	1,999978

Yuqoridagi 4- jadvaldan ko`ramizki, 8-iteratsiya x_1= 0,999974; x_2= 0,99951; x_3= 0,99998; x_4 = 2,00004; x_5= 1,99998 echimdan iborat. Bu topilgan taqribiy echim aniq echim

$$x_1^* = x_2^* = x_3^* = 1; \qquad x_4^* = x_5^* = 2$$

dan beshinchi xonaning birliklari buyichagina farqlanadi.

2- misol.

$$\begin{cases} 1{,}02x_1 - 0{,}05x_2 - 0{,}10x_3 = 0{,}795 \\ -0{,}11x_1 - 1{,}03x_2 - 0{,}05x_3 = 0{,}849 \\ -0{,}11x_1 - 0{,}12x_2 + 1{,}04x_3 = 1{,}398 \end{cases}$$

tizimni Z ta iteratsiya bajarib eching va xatoligini baxolang.

E c h i s h . Berilgan tizim-matritsaning diaganal elementlari birga yaqin, kolganlari esa birdan ancha kichik.

Shu sababli iteratsiya usulini qo`llash uchun berilgan tizimni quyidagicha yozib olamiz:

$$x_1 = 0{,}795 - 0{,}02x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}10x_3;$$
$$X_2 = 0{,}849 + 0{,}11x_1 - 0{,}03x_2 + 0{,}05x_3;$$
$$x_3 = 1{,}398 + 0{,}11x_1 + 0{,}12x_2 - 0{,}04x$$

(31) yaqinlashish sharti bu tizim uchun bajariladi. Xakikatan ham,

$$\sum_{j=1}^{3} |C_{1j}| = 0{,}02 + 0{,}05 + 0{,}10 = 0{,}17 < 1$$
$$\sum_{j=1}^{3} |C_{2j}| = 0{,}11 + 0{,}03 + 0{,}05 = 0{,}19 < 1$$
$$\sum_{j=1}^{3} |C_{3j}| = 0{,}11 + 0{,}12 + 0{,}04 = 0{,}27 < 1$$

Boshlangich yaqinlashish $x^{(0)}$ sifatida ozod xadlar ustuni elementlarini ikki xona aniqlikda olamiz

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0{,}80 \\ 0{,}85 \\ 1{,}40 \end{pmatrix}$$

Endi ketma-ket quyidagilarni aniqlaymiz:

k = 1 da

$x_1^{(1)} = 0{,}795 – 0{,}016 + 0{,}0425 + 0{,}140 = 0{,}9615 \approx 0{,}962$

$x_2^{(1)} = 0{,}849 + 0{,}088 – 0{,}255 + 0{,}070 = 0{,}9815 \approx 0{,}982$

$x_3^{(1)} = 1{,}398 + 0{,}088 + 0{,}1020 – 0{,}056 =1{,}532$

k = 2 da

$x_1^{(3)} = 0{,}980$, $x_2^{(3)} = 1{,}004$, $x_3^{(3)} = 1{,}563$

k = 3 da

$x_1^{(3)} = 0{,}980$, $x_2^{(3)} = 1{,}004$, $x_3^{(3)} = 1{,}563$

Noma`lumlarning k=2 va k=3 dagi kiimatlari $3 \cdot 10^{-3}$ dan kamrok farq kilayapti, shuning uchun noma`lumlarning taqribiy qiymatlari sifatida

$x_1 \approx 0{,}980$, $x_2 \approx 1{,}004$, $x_3 \approx 1{,}563$

larni olamiz.

ZEYDEL USULI

Zeydel usuli chiziqli bir kadamli birinchi tartibli iteratsion usuldir. Bu usul oddiy iteratsion usuldan shu bilan farq kiladiki, dastlabki yaqinlashish $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ ga ko`ra $x_1^{(1)}$ topiladi. So`ngra $x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ ko`ra $x_2^{(1)}$ topiladi va x.k. Barcha $x_1^{(1)}$ lar aniqlangandan so`ng $x_i^{(2)}, x_i^{(3)}, \ldots$ lar topiladi. Aniqroq aytganda, hisoblashlar quyidagi tarx (sxema) buyicha olib boriladi:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1}{a_{11}} - \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k+1)} - \sum_{j=3}^{n} \frac{a_{2j}}{a_{22}} x_j^{(k)}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)}$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{b_n}{a_{nn}} - \sum_{j=1}^{n-1} x_j^{(k+1)}$$

dagi yaqinlashish shartlari Zeydel usuli uchun ham urinlidir. Ko`pincha Zeydel usuli oddiy iteratsiya usuliga nisbatan yaxshirok yaqinlashadi, ammo har doim ham bunday bulavermaydi. Bundan tash-kari Zeydel usuli programmalashtirish uchun qulaydir, chunki $x_i^{(k+1)}$ ning qiymati hisoblanayotganda $x_1^{(k)}, \ldots, x_{i-1}^{(k)}$ larning qiymatini saklab kolishning xojati yo`q.

Misol. Zeydel usuli bilan dagi 1- misolning echimi 5 xona aniqlikda topilsin.

E c h i s h . Tizimni

$$x_1=0,6 - 0,1x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 - 0,1x_5,$$
$$x_2 = 0,44 + 0,04x_1 - 0,04x_3 + 0,2x_4 + 0,08x_5,$$
$$x_3 = 0,95 + 0,1x_1 + 0,05x_2 + 0,1x_4 - 0,15x_5,$$
$$x_4 = 1 - 0,1x_2 + 0,1x_3 + 0,5x_5,$$
$$x_5 = 1,6 + 0,05x_1 + 0,1x_2 + 0,05x_3 + 0,1x_4$$

ko`rinishda yozib olamiz va dastlabki yaqinlashish x sifatida oddiy iteratsiya usulidagidek x =(0,6; 0,44; 0,95;1; 1,6) deb olamiz.

Iteratsiyaning birinchi kadamini bajaramiz:

$$x_1^{(1)} = 0,6 – 0,1\, x_2^{(0)} + 0,3x_3^{(0)} +0,2x_4^{(0)} – 0,1x_5^{(0)} =$$
$$=0,6 – 0,1 \cdot 0,44 + 0,3 \cdot 0,95 + 0,2 \cdot 1 – 0,1 \cdot 1,6 = 0,881$$
$$x_2^{(1)} = 0,44 + 0,04\, x_1^{(4)} - 0,04x_3^{(0)} +0,2x_4^{(0)} + 0,08x_5^{(0)} =$$
$$= 0,44 + 0,04 \cdot 0,881 - 0,04 \cdot 0,95 + 0,2 \cdot 1 – 0,08 \cdot 1,6 = 0,771$$
$$x_3^{(1)} = 0,95 + 0,1\, x_1^{(1)} + 0,05x_2^{(1)} +0,1x_4^{(0)} – 0,1x_5^{(0)} =$$

$$= 0{,}95 + 0{,}1 \cdot 0{,}881 + 0{,}05 \cdot 0{,}771 + 0{,}1 \cdot 1 - 0{,}15 \cdot 1{,}6 = 0{,}937$$
$$x_4^{(1)} = 1 - 0{,}1\, x_2^{(1)} + 0{,}1 x_3^{(1)} + 0{,}5 x_5^{(0)} = 1{,}817$$
$$x_5^{(1)} = 1{,}6 + 0{,}05 x_1^{(1)} + 0{,}1 x_2^{(1)} + 0{,}05 x_3^{(1)} + 0{,}1 x_4^{(1)} = 1{,}948$$

Keyingi yaqinlashishlarni 2- jadvalda keltiramiz:

2-jadval

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$	$x_5^{(k)}$
0	0,6	0,44	0,95	1	1,6
1	0.881	0,771	0,937	1,817	1,948
2	0,973	0,961	0,985	1.974	1,992
3	0,995	0,995	0,999	1,996	1,999
4	0,9995	0,9991	0,9997	1,9995	1,9998
5	0,99992	0,99989	0,99997	1.99991	1,99997
6	0,99999	0,99998	0,99999	1,99999	00000

Usulning ishchi algoritmi

Ko`rinib turibdiki, Zeydel usuli oddiy iteratsiya usulining bir ko'rinishidir. Bu usul asosiy g'oyasi shundan iboratki, $(k+1)$ - yaqinlashishda x_i qiymatini hisoblashda $x_1, x_2, ..., x_{i-1}$ oldin ma'lum bo'lgan $(k+1)$ yaqinlashishdagi qiymatlari qo'llaniladi.

Tenglamalar sistemasi normal ko'rinishga keltirilgan bo'lsin, ya'ni

$$X_i = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} X_j \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

Boshlang'ich yaqinlashishda $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}$ larni olamiz. $x_i^{(k)}$ - yaqinlashish ma'lum bo'lsa, $(k+1)$ yaqinlashish quyidagi formulalar yordamida hisoblanadi.

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21} x_1^{(k+1)} + \sum\limits_{j=2}^{n} \alpha_{2j} x_j^{(k)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum\limits_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum\limits_{j=i}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k+1)} = \beta_n + \sum\limits_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k)} \end{cases}$$

Iteratsiya jarayoni $\left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| < \varepsilon, \ (1 \le i \le n)$ shart bajarilguncha davom qildiriladi.

Sistema Zeydel usuli bilan yechilganda oddiy iteratsiya usulidagiga nisbatan tezroq natijaga erishiladi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Iteratsion usul nima?
2. Statsionar usul nima?
3. Oshkor usullar nima?
4. oshkormas usullar nima?
5. Birinchi usul nima?
6. Ikkinchi usul nima?
7. Boshlangich yaqinlashish nima?
8. Zeydel usuli nima?
9. Zeydel usulining oddiy iteratsiya usulidan farqi?