Course name: ***Algorithm of calculating methods***
Course language: **Uzbek**
Instructor: **Muhtorjon Yusupov**

Lecture 7 : *Determination of the approximate solution of the differential equations. Euler method.*

Fan nomi: ***Hisoblash usullarini algoritmlash***
Fan o'qituvchisi: **Muhtorjon Yusupov**

7-mavzu: *Differentsial tenglamalarni taqribiy echimlarini aniqlash. Eyler usuli.*

7-mavzu. Differentsial tenglamalarni taqribiy echimlarini aniqlash. Eyler usuli.

Reja:

1. Differentsial tenglamalarni taqribiy echimlarini aniqlash
2. Ketma-ket yaqinlashish usuli (Pikar algoritmi).
3. Eyler usuli.
4. Runge-Kutta usuli

Tayanch iboralar:

Differentsial tenglama, xususiy hosilali differentsial tenglama, integral egri chizig'i, umumiy echim, boshlang'ich shartlar, Koshi masalasi, Pikar algoritmi, analitik usul, grafik usul, raqamli usul, integral tenglama. Noma`lum koeffitsientlar, koeffitsientlarni topish, eyler usuli, Runge-Kutta usuli, boshlang'ich shart, funktsiyaning orttirmasi.

1. Differentsial tenglamalarni taqribiy echimlarini aniqlash

Ko`p amaliy masalalarda funktsiya hosilalarini ayrim nuqtalarda taqribiy hisoblashga to`g'ri keladi. Bu masala sonli differentsiallash masalasi deyiladi. Funktsiyaning analitik ko`rinishi noma`lum bo`lib uning ayrim nuqtalaridagi qiymatlari ma`lum bo`lsa, masalan, tajribadan topilgan bo`lsa, u holda uning hosilasi sonli differentsiallash yo`li bilan topiladi. Umuman aytganda, funktsiyani sonli differentsiallash masalasi doimo bir qiymatli ravishda echilavermaydi. Masalan, f(x) funktsiyaning $x=x_0$ nuqtadagi hosilasini topish uchun h>0 ni olib,

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad (1)$$

yoki

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} \qquad (2)$$

yoki

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \qquad (3)$$

kabi olishimiz mumkin. Ko`pincha (11) o`ng hosila, (12) chap hosila va (13) markaziy hosila deyiladi.

Agar tenglamada noma`lum funktsiya hosila yoki differentsial ostida qatnashsa, bunday tenglama differentsial tenglama deyiladi.

Agar differentsial tenglamada noma`lum funktsiya faqat bir o`zgaruvchiga bog'liq bo`lsa, bunday tenglama oddiy differentsial tenglama deyiladi. Masalan:

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{3}(1-2y); \quad y'=\frac{x^4}{2}; \quad \frac{dy}{dt}=t^2-1; \quad \sqrt{2}\frac{d^2y}{dx^2}=x^2+1; \quad xdy=3dx$$

Agar differentsial tenglamadagi noma`lum funktsiya ikki yoki undan ortiq o`zgaruvchilarga bog'liq bo`lsa, bunday tenglama xususiy hosilali differentsial tenglama deyiladi. Masalan:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x,y,z)$$

Differentsial tenglamaning tartibi deb, shu tenglamada qatnashuvchi hosilaning (differentsialning) eng yuqori tartibiga aytiladi. Masalan:

$$\frac{dz}{dx}=5(z-1); \qquad (u')^3=x^2+2$$

birinchi tartibli tenglamalar,

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=5(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}), \qquad \frac{d^4T}{dt^4}=1-(l^t+2)$$

esa 4-tartibli differentsial tenglamalardir.

Mavzularda faqat oddiy differentsial tenglamalarni ko`rib chiqamiz.

n – tartibli oddiy differentsial tenglamaning umumiy ko`rinishi quyidagicha:

$$F(x,y,y^{'},y'',...,y^{(n)})=0 \qquad (4)$$

bu erda x – erkli o`zgaruvchi; y – noma`lum funktsiya, $y',y'',...,y^{(n)}$ - noma`lum funktsiyaning hosilalari.

(14) ni ko`p hollarda quyidagi ko`rinishda yozish mumkin:

$$y^{(n)}=f(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)}) \qquad (5)$$

(15) ning echimi (yoki integrali) deb uni qanoatlantiruvchi shunday $y=\varphi(x)$ funktsiyaga aytiladiki, $\varphi(x)$ ni (15) ga qo`yganda u ayniyatga aylanadi.

Oddiy differentsial tenglama echimining grafigi uning integral egri chizig'i deyiladi.

n-tartibli differentsial tenglamaning echimida n ta erkli o`zgarmas son qatnashadi. Bu o`zgarmas sonlarni o`z ichiga olgan echim umumiy echim deyiladi. Umumiy echimning grafik ko`rinishi integral egri chiziqlar dastasini ifodalaydi. Umumiy echimda qatnashuvchi erkli o`zgarmaslarning aniq son qiymatlari ma`lum bo`lsa umumiy echimdan xususiy echimni ajratib olish mumkin.

Umumiy echimga kiruvchi erkli o`zgarmaslar masalaning boshlang'ich shartlaridan aniqlanadi. Bunda masala quyidagicha qo`yiladi: (14) differentsial tenglamaning shunday echimi $y = \phi(x)$ ni topish kerakki, bu echim erkli o`zgaruvchi x ning berilgan qiymati $x=x_0$ da quyidagi qo`shimcha shartlarni qanoatlantirsin:

$$x = x_0 \ \partial a \quad y = y_0, \quad y' = y'_0, \quad y'' = y''_0, ..., y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \qquad (6)$$

(16) shartlar boshlang'ich shartlar deyiladi, $x_0, y_0, y'_0, y''_0, ..., y_0^{(n-1)}$ - sonlar esa echimning boshlang'ich qiymatlari deyiladi. Boshlang'ich shartlar (16) yordamida umumiy echimdan xususiy echimni ajratib olinadi.

KOSHI MASALASI . $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$ differentsial tenglamaning echimini $x = x_0 \ \partial a \quad y = y_0, \quad y' = y'_0, \quad y'' = y''_0, ..., y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ boshlang'ich shartlar asosida topishga **Koshi masalasi** deyiladi. Birinchi tartibli differentsial tenglama (n=1) uchun Koshi masalasi quyidagichadir: boshlang'ich shart $x=x_0$ da $y=y_0$ ni qanoatlantiruvchi $y' = f(x, y)$ differentsial tenglamaning echimi topilsin. Birinchi tartibli differentsial uchun Koshi masalasining geometrik ma`nosi shundaki, umumiy echimdan (egri chiziqlar dastasidan) kordinatalari $x=x_0$, $y=y_0$ bo`lgan nuqtadan o`tuvchi integral egri chiziq ajratib olinadi.

Agar $f(x, y)$ biror $R_{|a,b|} = \{| x - x_0 | < a; \ | y - y_0 | < b\}$ sohada uzluksiz bo`lib, shu sohada Lipshits sharti $| f(x, \bar{y}) - f(x, y) | \leq N | \bar{y} + y |$ bajarilsa, u holda Koshi masalasi $y(x_0)=y_0$ shartni bajaruvchi yagona echimga egadir (bunda N – Lipshits doimiysi).

Differentsial tenglamalarning aniq echimini topish juda kamdan – kam xollardagina mumkin bo`ladi. Amaliyotda uchraydigan ko`pdan – ko`p masalalarda aniq echimni topishning iloji bo`lmaydi. Shuning uchun differentsial tenglamalarni echishda taqribiy usullar muhim rol' o`ynaydi. Bu usullar echimlar qay tarzda ifodalanishlariga qarab quyidagi guruhlarga bo`linadilar:

1. Analitik usullar. Bu taqribiy usullarda echim analitik (formula) ko`rinishda chiqadi.
2. Grafik usullar. Bu hollarda echimlar grafik ko`rinishlarda ifodalanadi.
3. Raqamli usullar. Bunda echim jadval ko`rinishida olinadi.

Hisoblash matematikasida mazkur uch guruhga kiruvchi bir qancha usullar ishlab chiqilgan. Bu usullarning bir-birlariga nisbatan muayyan kamchiliklari va ustunliklari mavjud. Muhandislik masalalarini echishda shularni hisobga olgan holda u yoki bu usulni tanlab olish lozim bo`ladi.

Koshi masalasi :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

differentsial tenglamaning $[a,b]$ kesmada aniqlangan va

$$y(x_0) = y_0$$

boshlang'ich shartlarni kanoatlantiruvchi taqribiy echimi topilsin.

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f_1(x, y, z)\\ \frac{dz}{dx} &= f_2(x, y, z)\end{aligned}\right\},$$

$$y(x_0) = y_0,\ z(x_0) = z_0,$$

taqribiy qiymatlar $y(x_i) \approx y_i, z(x_i) \approx z_i$ lar uchun yaqinlashishlar quyidagi formulalar bo`yicha topiladi.

$$\left\{\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \Delta y_i, \Delta y_i = hf(x_i, y_i, z_i)\\ z_{i+1} &= z_i + \Delta z_i, \Delta z_i = hf(x_i, y_i, z_i)\end{aligned}\right\} \quad \text{bunda} \quad i=0,1,2,\ldots, n$$

2. KETMA-KET YAQINLASHISH USULI (PIKAR ALGORITMI)

Pikar algoritmi analitik usullardan bo`lib amaliy masalalarni echishda qo`llaniladi.

Faraz qilaylik,

$$y' = f(x, y) \qquad (7)$$

differentsial tenglamaning o`ng tomoni $\{|x - x_0| \le a; \quad |y - y_0| \le b\}$ to`rtburchakda uzluksiz va *y* bo`yicha uzluksiz xususiy hosilaga ega bo`lsin. (17) tenglamaning $x=x_0$ da

$$y(x_0) = y_0 \qquad (8)$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi echimi topilsin.

(17) dan $y' = \dfrac{dy}{dx} = f(x, y); \quad dy = f(x, y)dx$ bu ifodaning ikala tomonini x_0 dan x gacha integrallasak,

$$\int_{x_0}^{x} dy = \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx$$

Bundan (18) hisobga olinsa,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx \qquad (9)$$

(19) da noma`lum funktsiya integral ifodasi ostida qatnashganligi tufayli u *integral tenglama* deb ataladi. (19) da *f(x,y)* funktsiyadagi *y* o`rniga uning ma`lum qiymati $y_0$ ni qo`yib birinchi yaqinlashish bo`yicha echimni topamiz:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx \qquad (10)$$

Endi (19) dagi *f(x,y)* funktsiyadagi *y* o`rniga uning ma`lum qiymati y_1 ni qo`ysak, ikkinchi yaqinlashish bo`yicha echim $y_2(x)$ ni topamiz:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)dx \qquad (11)$$

Ushbu jarayonni davom ettirsak,

$$\begin{cases} y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_2)dx \\ \text{.................................} \\ y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx \end{cases} \qquad (12)$$

Shunday qilib, quyidagi funktsiyalar ketma – ketligi $\{y_i(x)\}$ ni tashkil qildik:

$$y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x),\ \ldots,\ y_n(x) \qquad (13)$$

(113) yaqinlashuvchi yoki o`zoqlashuvchi bo`lishi mumkin. Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz:

Teorema. Agar $(x_0;\ y_0)$ nuqta atrofida $f(x,y)$ funktsiyaning uzluksiz va chegaralangan xususiy hosilasi $f'_y(x,y)$ mavjud bo`lsa, u holda $\{y_i(x)\}$ ketma – ketlik $y' = f(x,y)$ tenglamaning echimi bo`lgan va $y(x_0)=y_0$ shartni qanoatlantiruvchi y(x) funktsiyaga yaqinlashadi.

Demak, differentsial tenglamalarni echishda ushbu teoremaning shartlari bajarilsa (ya`ni (113) yaqinlashuvchi bo`lsa), Pikar usulini qo`llash mumkin. Agar (113) o`zoqlashuvchi bo`lsa, bu usulning ma`nosi bo`lmaydi.

Misol. Ketma – ket yaqinlashish usuli bilan (Pikar usuli) $y' = \frac{dy}{dx} = x + y$ differentsial tenglamaning x=0 da y=1 shartni qanoatlantiruvchi xususiy echimi topilsin.

Echish. $\frac{dy}{dx} = x + y$ bundan x=0 da y=1 ekanligini hisobga olsak,

$$y = 1 + \int_0^x (x + y)dx$$

(110) ga asosan,

$$y_1 = 1 + \int_0^x (x+1)dx = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

(111) ga asosan,

$$y_2 = 1 + \int_0^x \left(x + 1 + x + \frac{x^2}{2}\right)dx = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6}$$

y_3 va y_4 ni hisoblaymiz:

$$y_3 = 1 + \int_0^x \left(x + 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6}\right)dx = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24}$$

$$y_4 = 1 + \int_0^x \left(x + 1 + x + x^2 + \frac{x^4}{24}\right)dx = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{120}$$

Berilgan tenglamaning aniq echimi:

$$y = 2e^x - x - 1 = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{60} + \frac{x^6}{360} + ...$$

Bundan ko`rinadigan taqribiy echimlar y_3 va y_4 aniq echimdan faqat oxirgi hadlari bilan farq qiladilar.

EYLER USULI

Yuqorida ko`rilgan usullar taqribiy analitik usullar bo`lib, bu hollarda echimlar analitik (formula) ko`rinishlarida olindi. Bu usullar bilan topilgan echimning aniqlik darajasi haqida fikr yuritish birmuncha murakkab bo`ladi. Masalan, ketma – ket differentsiallash usulini qo`llaganda qatorning juda ko`p hadlarini hisoblashga to`g'ri keladi va ko`p hollarda bu qatorning umumiy hadini aniqlab bo`lmaydi. Pikar algoritmini qo`llaganimizda esa, juda ko`p murakab integrallarni hisoblashga to`g'ri keladi va ko`p hollarda integral ostidagi funktsiyalar elementar funktsiyalar orqali ifodalanmaydi. Amaliy masalalarni echishda echimlarni formula ko`rinishida emas, balki jadval ko`rinishida olish qulay bo`ladi. Differenuial tenglamalarni raqamli usullar bilan echganda echimlar jadval ko`rinishida olinadi. Amaliy masalalarni echishda ko`p qo`llaniladigan eyler va Runge – Kutta usullarini ko`rib chiqamiz.

Eyler usuli. Quyidagi

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

birinchi tartibli differentsial tenglamaning [a,b] kesmada boshlang'ich shart $x=x_0$ bo`lgan hol uchun $y=y_0$ ni qanoatlantiruvchi echimi topilishi lozim bo`lsin. [a,b] kesmani x_0, x_1, x_2,…, x_n nuqtalar bilan n ta teng bo`lakchalarga ajratamiz; bunda $x_i = x_0 + ih$ (i= 0,1,2,…n), $h = \frac{b-a}{n}$ - qadam.

(1 1) tenglamani [a,b] kesmaga tegishli bo`lgan biror [x_k, x_{k+1}] kesmada integrallasak,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y)dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'dx = y(x) \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = y(x_{k+1}) - y(x_k) = y_{k+1} - y_k$$

ya`ni,

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y)dx \qquad (2)$$

Bu erda integral ostidagi funktsiyani $x=x_k$ nuqtada boshlang'ich o`zgarmas qiymatiga teng deb qabul qilinsa, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y)dx = f(x_k, y_k) \cdot x \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = f(x_k, y_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) = y_k' \cdot h$$

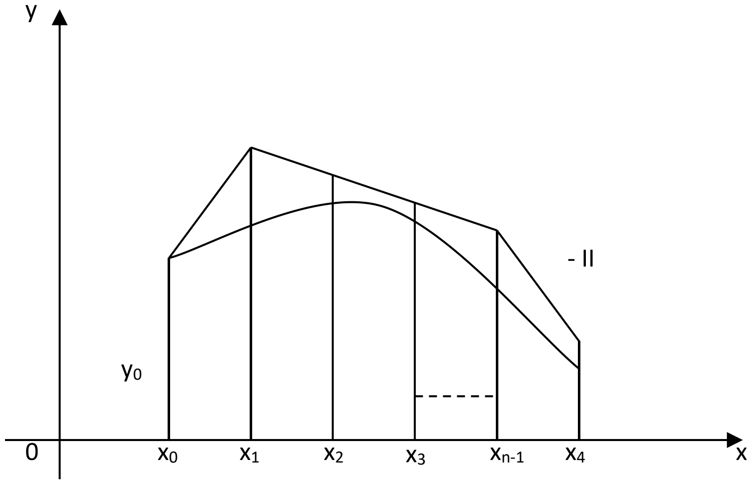
U holda (1 2) dan

$$y_{k+1} = y_k + y_k' h \qquad (3)$$

$y_{k+1} - y_k = \Delta y_k$ ya`ni $y_k' h = \Delta y_k$ deb belgilasak,

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k \qquad (4)$$

Ushbu jarayonni [a,b] ga tegishli bo`lgan har bir kesmacha uchun takrorlab, (1 1) ning echimini ifodalovchi jadvalini to`zamiz. eyler usulining geometrik ma`nosi shundayki, bunda (1 1) ning echimini ifodalovchi integral egri chiziq siniq (II) chiziqlar bilan almashtiriladi (10 - rasm).



10 – rasm

Quyidagi tizim

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z) \\ z' = f_2(x, y, z) \end{cases} \qquad (5)$$

uchun

$$x=x_0 \text{ da } y=y_0,\ z=z_0 \qquad (1\ 6)$$

boshlang'ich shart berilgan. (5) ning taqribiy echimlari quyidagi formulalar orqali topiladi:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \qquad z_{i+1} = z_i + \Delta z_i$$

bu erda

$$\Delta y_i = hf_1(x_i, y_i, z_i); \qquad \Delta z_i = hf_2(x_i, y_i, z_i) \qquad (i = 0,1,2,...)$$

Misol. eyler usuli yordamida $y' = y - \dfrac{2x}{y}$ differentsial tenglamaning [0,1] kesmada olingan va $u(0)=1$ boshlang'ich shartni qanotlantiruvchi *u(x)* echimining taqribiy qiymatlarini h=0,2 qadam bilan toping.

Echish:

$$f(x, y) = y - \frac{2x}{y}; \; a = 0, \; b = 1, \; x_0 = 0, \; y_0 = 1, \; h = 0{,}2$$

Quyidagi hisoblash jadvalini to`zamiz.

1- qator .

i=0, $x_0 = 0, y_0 = 1{,}0000$

$$f(x_0, y_0) = y_0 - \frac{2x_0}{y_0} = 1 - \frac{2*0}{1} = 1{,}0000$$

$$\Delta y_0 = hf(x_0, y_0) = 0{,}2*1 = 0{,}2000$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, i = 0; y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0{,}2 = 1{,}2000$$

2-qator.

i=1 , $x_1 = 0 + 0{,}2 = 0{,}2; y_1 = 1{,}2000$

$$f(x_1, y_1) = y_1 - \frac{2x_1}{y_1} = 1{,}2 - \frac{2*0{,}2}{1{,}2} = 0{,}8667$$

$$\Delta y_1 = hf(x_1, y_1) = 0{,}2*0{,}8667 = 0{,}1733$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1{,}2 + 0{,}1733 = 1{,}3733$$

va xakazo i=2,3,4,5lar uchun hisoblanadi.

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i) = y_i - \frac{2x_i}{y_{i;}}$	$\Delta y_i = hf(x_i, y_i)$
0	0,1	1,0000	1,0000	0,200
1	0,2	1,2000	0,8667	0,1733
2	0,4	1,3733	0,7908	0,1582
3	0,6	1,5315	0,7480	0,1496
4	0,8	1,6811	0,7293	0,1459
5	1,0	1,8270		

RUNGE-KUTTA USULI

Runge - Kutta usuli ko`p jihatdan Eyler usuliga o`xshash, ammo aniqlik darajasi eyler usuliga nisbatan yuqori bo`lgan usullardan biridir.

Runge-Kutta usuli bilan amaliy masalalarni echish juda qulay. CHunki, bu usul orqali noma`lum funktsiyaning $x_{i+1}$ dagi qiymatini topish uchun uning $x_i$ dagi qiymati aniq bo`lishi etarlidir. Runge-Kutta usuli uning aniqlash darajasiga ko`ra bir necha turlarga bo`linadi. Shulardan amaliyotda eng ko`p qo`llaniladigani to`rtinchi daraja aniqlikdagi Runge-Kutta usulidir.

Birinchi tartibli $y=f(x,y)$ differentsial tenglama uchun $x=x_i$ ($i=0,1,2,\ldots n$) $y=y_i$ ma`lum bo`lsin. Bu erda y_i boshlang'ich shart ma`nosida bo`lmasligi ham mumkin. Noma`lum funktsiya $y$ ning $x=x_{i+1}$ dagi qiymati $y_{i+1}=y_{i+1}(x)$ ni topish uchun quyidagi ketma-ket hisoblash jarayonini amalga oshirmoq lozim bo`ladi:

$$\left.\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h, \quad y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \\ \Delta y_i &= \frac{1}{6}[Q_1^{(i)} + 2Q_2^{(i)} + 2Q_3^{(i)} + Q_4^{(i)}], \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

bu erda

$$\begin{aligned} Q_1^{(i)} &= hf(x_i, y_i), \\ Q_2^{(i)} &= hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{Q_1^{(i)}}{2}), \\ Q_3^{(i)} &= hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{Q_2^{(i)}}{2}), \\ Q_4^{(i)} &= hf(x_i + h, y_i + Q_3^{(i)}), \end{aligned} \qquad (8)$$

i=0,1,2,…,n-1, $h = \dfrac{b-a}{n}$ - integrallash qadami.

Tenglamaning echimi qidirilayotgan [a,b] kesma $x_i = x_0 + ih$ *(i=0,1,2,…,n)* nuqtalar bilan o`zaro teng n ta bo`lakka bo`lingan. $i$ ning ha bir qiymati uchun (7) va (8) dagi amallarni bajaramiz va noma`lum funktsiya y ning qiymatlarini (tenglamaning echimini) quyidagi formuladan topamiz:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \qquad (i = 0,1,2,...,n) \qquad (9)$$

Misol: Runge-Kutta usuli bilan $y' = x + \cos(\dfrac{y}{\sqrt{5}})$ tenglamaning [1,8; 2,8] kesmada aniqlangan va $u(1,8)=2,6$ boshlang’ich shartni qanoatlantiruvchi echimini h=0,1 qadam bilan hisoblang.

Echish:

$$f(x,y)=x+\cos(\frac{y}{\sqrt{5}});\ x_0 = 1{,}8;\ y_0 = 2{,}6,$$

$$h = 0{,}1;\ a = 1{,}8;\ b = 2{,}8;\ h = \frac{b-a}{n} = 0{,}1;\ n = 10,$$

$$i = 0;\ x_0 = 1{,}8;\ y_0 = 2{,}6,$$

$$Q_1^{(0)} = hf(x_0, y_0) = 0{,}1\left\{x_0 + \cos(\frac{y_0}{\sqrt{5}})\right. = 0{,}2196,$$

$$Q_2^0 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{Q_1^{(0)}}{2}) = 0{,}1 * f(1{,}85; 2{,}7098) = 0{,}2012,$$

$$Q_3^{(0)} = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{Q_2^{(0)}}{2}) = 0{,}1 * f(1{,}85; 2{,}7006) = 0{,}2205,$$

$$Q_4^{(0)} = hf(x_0 + h, y_0 + Q_3^{(0)}) = 0{,}1 * f(1{,}9; 2{,}6099) = 0{,}2927,$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}[Q_1^{(0)} + 2Q_2^{(0)} + Q_4^{(0)}] = 2{,}0259,$$

$$i = 1;\ x_1 = 1{,}9;\ y_1 = 2{,}0259,\ y_2 = 3{,}0408$$

va hokazo.

Qiymatlar jadvali

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3
y_i	2,6	2,0259	3,0408	3,2519	3,4861	3,4861
I	6	7	8	9	10	
x_i	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	
y_i	3,9260	4,1478	4,3700	4,5971	4,9172	

Takrorlash uchun savollar:

1. Differentsial tenglama deb nimaga aytiladi?
2. Oddiy differentsial tenglama va xususiy xosilali differentsial tenglama farqi nimada?
3. Koshi masalasi deb nimaga aytiladi?
4. Pikar algoritmi nima, uning asosiy formulalarini izohlang?
5. Eyler usulining geometrik ma`nosi.
6. Runge – Kutta usulining asosiy formulalarini ayting?
7. Eyler va Runge – Kutta usullarining asosiy farqi nimada?