Course name: ***Algorithm of calculating methods***
Course language: **Uzbek**
Instructor: **Muhtorjon Yusupov**

Lecture 8 : *Approximate values of definite integrals. Rectangular and trap methods. Simpson formula.*

Fan nomi: ***Hisoblash usullarini algoritmlash***
Fan o'qituvchisi: **Muhtorjon Yusupov**

8-mavzu: *Integral tenglamalarning taqribiy yechimlari. To`rtburchak va trapetsiya usullari. Simpson formulasi.*

8-mavzu. Integral tenglamalarning taqribiy yechimlari. To`rtburchak va trapetsiya usullari. Simpson formulasi.

Reja:

1. Masalaning qo`yilishi.
2. Aniq integralning geometrik ma`nosi.
3. To`rtburchak va trapetsiya usullari.
4. Usullarning ishchi algoritmlari, ularning xatoliklari miqdorini baholash va uni kamaytirish yo`llari.

Tayanch iboralar:

Boshlangich funktsiya, elementar funktsiya, integral, aniq integral, aniqmas integral, kvadratur, kvadratur formula, to`g'ri turtburchak formulasi, trapetsiya formulasi, egri chiziqli trapetsiya, egri chiziqli trapetsiya yuzi, aniq echim, bulinish nuqtalari.

1. MASALANING QO`YILISHI

Kundalik xayotimizda uchraydigan ko`p muxandislik masalalarini echishda aniq integrallarni hisoblashga to`g'ri keladi. Faraz kilaylik, $\int_a^b f(x)dx$ hisoblash talab etilsin. Bu erda *f(x)* - [*a; b*] kesmada berilgan uzluksiz funktsiya. Bu integralni hisoblashda quyidagi formula (N'yuton—Leybnits formulasi) qo`llaiiladi:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (1)$$

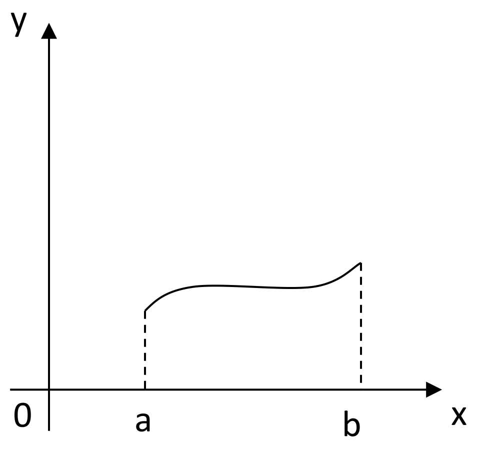
bu erda *F(x)* – boshlangich funktsiya. Agar boshlangich funktsiya *F(x)* ni elementar funktsiyalar orqali ifodalab bo`lmasa yoki integral ostidagi funktsiya *f(x)* jadval ko`rinishida berilsa, u xolda (1) formuladan foydalanish mumkin emas. Bu xolda aniq integralni taqribiy formulalar orqali hisoblashga to`g'ri keladi. Bunday formulalarga *kvadratur formulalar* deyiladi.

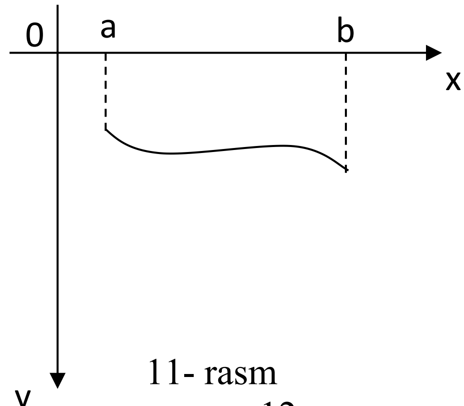
ANIQ INTEGRALNING GEOMETRIK MA`NOSI

Bunday formulalarni keltirib chiqarish uchun aniq integralning geometrik ma`nosini bilmoklik lozim.

Agar [*a; b*] kesmada *f(x) ≥ 0* bo`lsa, u xolda $\int_a^b f(x)dx$ ning qiymati son jixatidan *y = f(x)* funktsiyani grafigi hamda *x=a, x=b,* to`g'ri chiziqlar bilan chegaralangan shakl (figura) ning yuziga teng (11-rasm). Agar [a;b] kesmada

$f(x) < 0$ bo`lsa, integralning qiymati yuqorida keltirilgan shaklning teskari ishora bilan olingan yuziga teng (12-rasm).





11- rasm

12-rasm

Shunday kilib aniq integralni hisoblash deganda biror shaklning yuzini hisoblash tushuniladi. Quyida aniq integralni hisoblash uchun ba`zi taqribiy formulalar bilan tanishib chiqamiz.

TO`G'RI TURTBURCHAKLAR VA TRAPETSIYALAR FORMULASI

Faraz kilaylik, bizdan $\int_a^b f(x)dx$ aniq integralning taqribiy qiymatini topish talab etilsin. $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ nuqtalar yordamida $[a; b]$ kesmani p ta teng bulakchalarga bo`lamiz. Har bir bulakchaning uzunligi $h = \frac{b-a}{n}$. Bulinish nuqtalari esa:

$x_0 = a;\quad x_1 = a + h; x_2 = x + 2h;\quad x_3 = a+3h \ldots x_{n-1} = a+(n-1)h; x_n = b$

Bu nuqtalarni tugun nuqtalar deb ataymiz. $f(x)$ funktsiyaning tugun nuqtalaridagi qiymatlari $y_0, y_1, y_2, \ldots y_n$ bo`lsin. Bular $y_0 = f(a); y_1 = f(x_1) \ldots y_n=f(b)$ larga teng bo`ladi .

Egri chiziqli trapetsiyaning yuzini topish uchun [a,b] kesmani bo`lish natijasida hosil bo`lgan barcha turtburchaklarning yuzini hisoblab, ularni jamlash kerak bo`ladi. Albatta bu yuzachalarni hisoblashlarda ma`lum darajada xatoliklarga yo`l qo`yiladi (shtrixlangan yuzachalar). Bularni va 1-da aytilgan aniq integralning geometrik ma`nosini hisobga olsak, quyidagini yozishimiz mumkin bo`ladi:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot y_0 + hy_1 + hy_2 + \ldots + hy_{n-1} = h(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) = h\sum_{k=0}^{n-1} y_k;$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{k=0}^{n-1} y_k \qquad (2)$$

Bu erda to`g'ri turtburchak yuzini hisoblashda uning chap tomon ordinatasi olindi. Agar ung tomon ordinatami olsak ham shunday formulaga ega bo`lamiz:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_n) = h\sum_{k=1}^{n} y_k;$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{k=1}^{n} y_k \qquad (3)$$

(2) va (3) larni moe ravishda *chap* va *ung formulalar* deyiladi. Agar 13- rasmga e`tibor bersak, (2) formula bilan integralning qiymati hisoblanganda integralning taqribiy qiymati aniq qiymatidan ma`lum darajada kamrok chikadi, (3) yordamida hisoblanganda esa taqribiy qiymat aniq qiymatdan ma`lum darajada kattarok chikadi. Ya`ni (2) va (3) formulalar yordamida aniq integralning taqribiy qiymati hisoblanganda bu formulalardan biri integralning aniq qiymatini kami bilan ifodalasa, ikkinchisi esa ko`pi bilan ifodalaydi. 13-rasmdan kurinadiki, (2) va (3) formulalarni qo`llaganda yo`l qo`yiladigan xatolikni kamaytirish uchun bulinish nuqtalarini iloji boricha ko`prok olish, ya`ni kadam *h* ni tobora kichraytirish lozim bo`ladi. Albatta, h ni kichraytirish hisoblash jarayonining keskin usishiga olib keladi. Bu narsadan xavotirga tushmasligimiz kerak, chunki butun hisoblash jarayoni EHM ga yuklanadi.

Misol. To`g'ri turtburchaklar formulalari (2) va (3) yordamida $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ integralning taqribiy qiymatlari topilsin.

E c h i s h . Bu erda *a=0; b=1; n=10; h=(b- a)/n=0,1.*

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$x_0=a=0; \quad x_1=a+h=0,1; \quad x_2=a+2h=0,2; x_3=a+3h=0,3$$

$$x_4=a+4h=0,9 \ ... \ x_9=a+9h=0,9; \quad x_{10}=b=1$$

$$y_0 = f(x) = \frac{1}{1+x_0} = \frac{1}{1+0} = 1; \qquad y_1 = f(x_1) = \frac{1}{1+0,1} = 0,909;$$

$$y_2 = f(x_2) = 0,833; \ y_3 = f(x_3) = 0,769; ... y_9 f(x_9) = 0,53; \qquad y_{10} = f(x_{10}) = 0,5.$$

(2) dan $\int_o^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0,1(1 + 0,909 + ... + 0,526) = 0,718$

(3) dan $\int_o^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0,1(0,909 + 0,833 + \ ... \ + 0,5) = 0,6688$

Ma`lumki, $\int_o^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2, \ \ln 2 \approx 0,693$. Bulardan kurinadiki, aniq echim chap va ung formulalar orqali topilgan echimlar orasida yotadi.

Topilgan echimlar 0,718 va 0,668 ning o'rta arifmetigini olsak, bu 0,693 ga teng bo`ladi, bu esa aniq echim bilan ustma-ust tushadi.

Bu xulosalarni nazarga olgan xolda (2) va (3) formulalar xad-larini moc ravishda kushib o’rta arifmetigini olsak, quyidagi ifoda hosil bo`ladi:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) = h\left(\frac{y_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} y_k + \frac{y_n}{2}\right) \qquad (4)$$

(4) formula *trapetsiyalar formulasi* deb ataladi. Bu formula yordamida topilgan integralning taqribii qiymatining aniqligini oshirish uchun bulinish nuqtalari soni n» ni ikki, uch va x.k. marta oshirish kerak bo`ladi. Albatta bunda ham hisoblash xajmi bir necha marotaba oshadi.

Usullarning ishchi algoritmlari, ularning xatoliklari miqdorini baholash va uni kamaytirish yo`llari

Faraz kilaylik, $\int_a^b f(x)dx$ integralning aniq qiymati I bo`lsin. U xolda

$$I = I_m + R, \qquad (5)$$

bu erda I_m – trapetsiyalar formulasi yoki Simpson formulasi yordamida integralni hisoblaganda chikkan natija; R – shu formulalarni qo`llaganda yo`l qo`yilga xatolik. Agar integral ostidagi $f(x)$ funktsiya analitik (formula) ko`rinishda bo`lsa, integrallarni taqribiy hisoblash xatoligini ifodalovchi formulalarni matematik analiz usullari bilan keltirib chiqarish mumkir Agar integral ostidagi funktsiya jadval yoki grafik ko`rinishda bo`lsa, bunday formulalarni keltirib chiqarishning iloji bo`lmaydi. Shuning uchun bu xolda boshqa usullar qo`llashga to`g’ri keladi. Shulardan ba`zi birlarini kurib chiqamiz.

Ukuvchiga ortikcha kiyinchiliklar tugdirmaslik hamda kiskalik uchun formulalarni keltirib chiqarishni (isbotlashni) lozim kur-madik. Yuqorida aytilganidek, bular xammasi matematik analiz usullari yordamida isbotlanadi.

Faraz kilaylik $\int_a^b f(x)dx$ integralni $n=2m$ ta va $n=4m$ ta bulakchalarga bo`lib, Simpson formulasini qo`llab olingan natijalar I_{2m} va I_{4m} bo`lsin. $I_{2m}$ ning qiymatini $I_{4m}$ bilan solishtirib Simpson formulasining aniqligi xakida muloxaza yuritish mumkin. Bunda $I_{2m}$ ning xatoligi quyidagi sondan katta bo`lmaydi:

$$R_{4m} \le \frac{|I_{4m} - I_{2m}|}{15} \qquad (6)$$

$[a,b]$ kesmada $M_k = max\ f^k\ (x)$. (6) dan R-I-I_m. Bu xolda xatolik-lar quyidagicha baxolanadi:

Trapetsiyalar formulasi uchun

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(b - x_1)}{f(b) - f(x_1)} \qquad (7)$$

Simpson formulasi uchun

$$|R| \le \frac{M_4 (b-a)^5}{180(2m)^4}; \quad \left(M_4 = f^{(IV)}(x)\right) \qquad (8)$$

Misol. $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$ integralni trapetsiyalar va Simpson formulalari yordamida hisoblaganda yo`l qo`yiladigan xatoliklar topilsin.

E c h i s h .

$f(x) = \frac{1}{1+x}$; $f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$; $f^{(IV)}(x) = \frac{2}{(x+1)^5}$ [0,1] kesmada $|f''(x)| \le 2$; $|f^{(IV)}(x)| \le 2$

$n=8$ da (14) dan trapetsiyalar formulasi uchun:

$$|R| \le \frac{2}{12 \cdot 64} = \frac{1}{384} < 0{,}003;$$

(15) dan Simpson formulasi uchun:

$$|R| \le \frac{24}{180 \cdot 8^2} = \frac{1}{30720} < 0{,}000034;$$

Simpson (parabola) usuli.

Tayanch iboralar:

Elementar funktsiya, integral, aniq integral, aniqmas integral, kvadratur, egri chiziqli trapetsiya, egri chiziqli trapetsiya yuzi, aniq echim, bulinish nuqtalari, Simpson formulasi.

1. SIMPSON (PARABOLA) USULI

Simpson formulasi yuqorida keltirib chikarilgan formulalarga karaganda aniqligi yuqori bo`lgan formula hisoblanadi. Bu formulada integralning qiymatini yuqori aniqlikda olish uchun bulinish kadamlarini tobora oshirish talab etilmaydi. *[a,b]* kesmani $a=x_0<x_1<x_2 \ldots x_{n-1}<x_n=b$ nuqtalar bilan $p=2$ ta juft teng bulakchalarga ajratamiz. $u=f(x)$ egri chiziqka tegishli bo`lgan (x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2) nuqtalar orqali parabola o'tkazamiz. Bizga ma`lumki, bu parabolaning tenglamasi

$$y = Ax^2 + Bx + C \qquad (5)$$

bo`ladi, bu erda *A, V, S* — hozircha noma`lum bo`lgan koeffitsientlar. $[x_0,x_2]$ kesmadagi egri chiziqli trapetsiyaning yuzini shu kesmadagi parabola bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi bilan almashtirsak, quyidagiga ega bo`lamiz:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} \left(Ax^2 + Bx + C\right)dx = \left[A\frac{x^3}{3} + Cx + B\frac{x^2}{2}\right]_{x_0}^{x_2} = A\frac{x_2^3 - x_0^3}{3} + B\frac{x_2^2 - x_0^2}{2} + C(x_2 - x_0)$$

(x_2 —x_0) ni kavsdan tashqariga chikarib, umumiy maxraj-ga keltirsak:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{x_2 - x_0}{6}\left[2A\left(x_0^2 + x_0x_2 + x_2^2\right) + 3B(x_0 + x_2) + 6C\right] \qquad (6)$$

(5) dagi noma`lum *A, V, S* koeffitsientlar quyidagicha topiladi: *x* ning x_0, x_1, x_2 qiymatlarida *f(x)* ning qiymatlari y_0, y_1, y_2 ekanini va $x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2}$ j a m i n i hisobga olsak, (5) dan:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= Ax_0^2 + Bx_0 + C, \\ y_1 &= A\left(\frac{x_0 + x_2}{3}\right)^2 + B\frac{x_0 + x_2}{2} + C, \\ y_2 &= Ax_2^2 + Bx_2 + C. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

(7) ning ikkinchi ifodasini turtga ko`paytirib, uchala tenglikni bir-biriga kushsak:

$$\begin{aligned} y_0 + 4y_1 + y_2 &= A\left[x_0^2 + (x_0 + x_2)^2 + x_2^2\right] + B\left[x_0 + 2(x_0 + x_2) + x_2\right] + 6C = \\ &= 2A\left[x_0^2 + x_0x_2 + x_2^2\right] + 3B(x_0 + x_2) + 6C \end{aligned} \qquad (8)$$

Bu ifodani (6) bilan solishtirsak, bularning ung taraflari bir xil ekanligini ko`ramiz. (8) ni (6) ning ung tarafiga kuysak va $x_2$-$x_0$=$2h$ *[h=(b-a)/n]* ekanligini e`tiborga olsak, quyidagi taqribiy tenglikni topamiz:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \qquad (9)$$

Xuddi shunday formulani *[x_2, x_4]* kesma uchun ham keltirib chiqarish mumkin:

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) \qquad (10)$$

Bu formulalarni butun kesma *[a, b]* uchun keltirib chikarib, bir-biriga kushsak, quyidagini hosil kilamiz:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + ... + 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}) \qquad (11)$$

Bu topilgan formula *Simpson formulasidir.* Ba`zi xollarda uni *parabolalar formulasi* deb ham ataydilar.

(11) ni eslab kolish unchalik kiyin emas; tok rakamli ordinatalar turtga, juft rakamli ordinatalar (ikki chekkadagi ordinatadan tashqari) ikkita ko`paytiriladi. CHekkadagi ordinatalar $y_0$, $y_{2m}$ esa birga ko`paytiriladi.

Misol. $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ integralning qiymatini trapetsiyalar formulasi hamda Simpson formulasi yordamida toping.

E c h i s h : Bu erda $0 \le x \le 1$; $n=10$ · $a=0$; $b=1 \cdot h=(b-a)/n=0,1$; $f(x) = y = \frac{1}{1+x^2}$. Quyidagi 1-jadvalni to`zamiz

1-jadval

x	x^2	$1+x^2$	$y = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	x	x^2	$1+x^2$	$y = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
0,0	0,00	1,00	1,0000000	0,6	0,36	1,36	0,73522941
0,1	0,01	1,01	0,9900990	0,7	0,49	1,49	0,6711409
0,2	0,04	1,04	0,9615385	0,8	0,64	1,64	0,6097561
0,3	0,09	1,09	0,9174312	0,9	0,81	1,81	0,5524862
0,4	0,16	1,16	0,8620690	1,0	1,00	2,00	0,5000000
0,5	0,25	1,25	0,8000000				

Trapetsiyalar formulasiga asosan

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx h\left(\frac{y_0 + y_{10}}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_9\right) = 0,1\left(\frac{1+0,5}{2} + 0,9900990 + \ldots + 0,5524862\right) =$$
$$= 0,7849815$$

Simpson formulasiga asosan

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + 4y_7 + 2y_8 + 4y_9 + y_{10}\right) =$$
$$= \frac{0,1}{3}\left[1 + 0,5 + 4(0,9900990 + 0,9174312 + \ldots + 0,5524862 + 2(0,9615385 + \ldots + 0,6097561))\right] =$$
$$0,7853981$$

Bizga ma`lumki, $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctgx \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \approx 0,78539816$

Bulardan kurinadiki, bu misol uchun trapetsiyalar formulasi qo`llanganda nisbiy xatolik 0,06 % da oshmaydi. Simpson formulasi qo`llanganda esa nisbiy xatolik deyarli yo`q.

Takrorlash uchun savollar:

1. N'yuton-Leybnits formulasini ifodalang.
2. N'yuton-Leybnits formulasi kanakangi integrallarni hisoblashda qo`llaniladi?
3. Kvadratur formulalar deb nimaga aytiladi?
4. Aniq integralning geometrik ma`nosini tushuntiring.
5. Tugun nuqtalar nima?
6. Ixtiyoriy egri chiziqli trapetsiyani chizing.
7. Egri chiziqli trapetsiyaning yuzini hisoblash formulasini yozing.
8. Chap formulani yozing.
9. Ung formulani yozing.
10. Trapetsiyalar formulasini yozing.
11. Simpson formulasini ifodalang.
12. Simpson formulasi yana qanday nomlanadi?
13. Integrallarni hisoblashda yo`l qo`yilgan xatoliklar qanday topiladi?
14. Trapetsiya va Simpson usullarining asosiy farqi nimada?
15. Simpson usuli mohiyatini tushuntiring.