Course name: ***Algorithm of calculating methods***
Course language: **Uzbek**
Instructor: **Muhtorjon Yusupov**

Lecture 11: ***Basic features of linear programming problem solving***

Fan nomi: ***Hisoblash usullarini algoritmlash***
Fan o'qituvchisi: **Muhtorjon Yusupov**

11-mavzu: ***Chiziqli dasturlash masalalasini yechishning asosiy xususiyatlari***

11-mavzu. Chiziqli dasturlash masalalasini yechishning asosiy xususiyatlari

Reja:

1. Chiziqli dasturlash masalalari
2. Jarayonlarning chiziqli modellarini tuzish

Tayanch iboralar:

Chiziqli programmalashtirish masalalari, taqribiy yechim, grafik usul, Simpleks usuli.

Masalaning umumiy tarzda qo'yilishi

Qavariq programmalashtirishning maqsad funksiya va cheklanish shartlari chiziqli funksiyalardan iborat bo'lgan bo'limi *chiziqli programmalashtrish* deyiladi.

Bizga chiziqli

$$z = \sum_{i=1}^{n} C_j x_j \qquad (1)$$

funksiyaning quyidagi chiziqli

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{m}} \\ &x_j \ge 0, \mathrm{j} = \overline{1,\mathrm{n}} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

cheklanish shartlarini qanoatlantiradigan minimumini topish talab qilingan bo'lsin. Bu yerda c_j, a_{ij}, b_i lar oldindan berilgan o'zgarmas sonlardir. Tengsizliklar sistemasi ko'rinishida berilgan cheklanish shartlari (2) ni qo'shimcha o'zgaruvchilar, ya'ni x_{n+i} kiritib tenglamalar sistemasini quyidagicha yozish mumkin:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+1} = b_{i,}\ i = \overline{1,m} \\ &x_i \ge 0, \mathrm{x}_{\mathrm{n+1}} \ge 0, \mathrm{j} = \overline{1,\mathrm{n}} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

(1) funksiyaning chiziqli cheklanish shartlari (2) ni qanoatlantiradigan minimumini topish masalasi *standart chiziqli programmalashtirish masalasi* deyiladi. (1) funksiyaning cheklanish shartlari (3) ni qanoatlantiradigan minimumini topish masalasi esa, *kanonik ko'rinishdagi chiziqli programmalashtirish masalasi* deyiladi. (1) - funksiyaga *maqsad* yoki *minimallashtiriladigan funksiya* deyiladi. (1) - (2) ga yoki (1) - (3) ga qo'yilgan

masalaning *matematik modeli* deyiladi. Tengsizliklar sistemasi (2) yoki tenglamalar sistemasi (3) ning bir necha hatto cheksiz ko‘p yechimlari bo‘lishi mumkin.

1-Ta’rif. Tenglamalar yoki tengsizliklar sistemasining istalgan manfiy bo‘lmagan yechimi *o‘rinli yechim* deyiladi.

2-Ta’rif. Maqsad funksiya (1) ga talab qilingan minimum (yoki maksimum) qiymat beruvchi o‘rinli yechim *optimal yechim* deyiladi.

Chiziqli programmalashtirish masalalarini yechishda, ayrim hollarda maqsad funksiya (1) ning maksimumini topish talab qilinadi. Biroq, minZ=max(-Z)bo‘lganligi uchun maqsad funksiyaning minimumini topish masalasini maksimumni topish masalasiga keltirish mumkin va aksincha.

4.2. Chiziqli programmalashtirish masalalarining har xil formada yozilishi

a) vektor formadayozilishi. Agar quyidagi

$$C = (c_1, c_2, ..., c_n),\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (4)$$

vektorlarni kiritsak, (1) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$Z = CX \qquad (5)$$

Xuddi shuningdek

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ . \\ . \\ a_{nj} \end{bmatrix} \quad j = \overline{1,n},\ E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}; E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}; ..., E_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix}; \mathrm{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}; \qquad (6)$$

vektorlar kiritsak cheklanish tengsizliklari (2) ni va tenglamalari (3) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n; x_j \geq 0, j = \overline{1,n} \qquad (7)$$

$$A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n + E_1x_{n+1} + E_2x_{n+2} + ... + E_nx_{n+m} = B \qquad (8)$$

(5)-(7) va (5)-(8) lar mos ravishda standart va kanonik ko‘rinishdagi chiziqli programmalashtirish masalalarining vektor formasidagi yozilishidir.

b) Matritsa formada yozilishi.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ldots a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (9)$$

matritsa va $Y=(x_{m+1},x_{m+2},...,x_{m+n})$ vektor kiritsak (2) va (3) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$AX \le B, \mathrm{x}>0 \qquad (10)$$

$$\begin{gathered} AX+Y=B \\ X>0, \mathrm{Y}>0 \end{gathered} \qquad (11)$$

(5)-(10) va (5)-(11) mos ravishda standart va kanonik ko‘rinishdagi chiziqli programmalashtirish masalalarining matritsa formadagi yozilishidir. (1)-(2) va (1)-(3) masalalarni yechishda qo‘llaniladigan matematik usullar *chiziqli prograshshlashtirish usullari* deyiladi. Har xil iqtisodiy, sanoatni boshqarish, optimal jihozlash, raketalarni loyihalash, uchuvchi apparatlar va transport harakatini tartibga solish masalalarini yechishda matematik usullarni qo‘llash uchun eng avvalo shu jarayonlarning mohiyatini to‘la aks ettiradigan matematik modellarni qurish kerak.

2-reja

Chiziqli programmalashtirish masalasining yechimini Simpleks usuli bilan topish bir necha bosqichdan iborat ekanligini biz yuqorida ko‘rib o‘tdik. Bu usulning asosiy qiyinchiligi har bir bosqichda yangi bazisga nisbatan maqsad funksiya va cheklanish shartlarini qaytadan yozib chiqishdan iboratdir. Agar shu bosqichlarning hammasi simpleks jadvallar yordamida bajarilsa, chiziqli programmalashtirish masalasini simpleks usuli bilan yechish ancha osonlashadi.

Buni quyidagi masalada ko‘rib chiqamiz:

$$\left.\begin{array}{l} x_1+a'_{1m+1}x'_{m+1}+a'_{1m+2}x'_{m+2}+\ldots+a'_{1j}x'_j+\ldots.+a'_{1n}x'_n=b'_1 \\ x_2+a'_{2m+1}x'_{m+1}+a'_{2m+2}x'_{m+2}+\ldots+a'_{2j}x'_j+\ldots+a'_{2n}x'_n=b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i+a'_{im+1}x'_{m+1}+a'_{im+2}x'_{m+2}+\ldots+a'_{ij}x'_j+\ldots+a'_{2n}x'_n=b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m+a'_{mm+1}x'_{m+1}+a'_{mm+2}x'_{m+2}+..+a'_{mj}x'_j+\ldots+a'_{mn}x'_n=b'_m \end{array}\right\}. \qquad (1)$$

$$x_j \ge 0, j=\overline{1,n}, b_s \ge 0, s=\overline{1,m}.$$

$$Z_{\min}+c'_{m+1}x_{m+1}+c'_{m+2}x_{m+2}+\ldots\ldots..+c'_jx_j+\ldots..c'_nx_n=c'_0\,. \qquad (2)$$

Faraz qilaylik, $c_j^{i>0}$ bo‘lganda hal qiluvchi element uchun $a_{ij}^{'}$ tanlangan bo‘lsin. $x_1, x_2, \dots, x_m$ — bazis noma’lumlar, x_{t+1}, ..., x_j..., x_n— ozod noma’lumlardir. $S_j > 0$ bo‘lganligi uchun maqsad funksiyaga minimum qiymat beruvchi optimal yechimni topish uchun $x_1, x_2, \dots, x_m$bazisdan yangi

$x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m,$

bazisga o‘tishimiz va shu yangi bazisga nisbatan cheklanish shartlarini

$$\left.\begin{aligned}
&x_1 + a_{1m+1}^{''}x_{m+1}^{'} + a_{1m+2}^{''}x_{m+2}^{'} + \dots + a_{1j}^{''}x_j^{'} + \dots\dots + a_{1n}^{''}x_n^{'} = b_1^{''}\\
&x_2 + a_{2m+1}^{''}x_{m+1}^{'} + a_{2m+2}^{''}x_{m+2}^{'} + \dots + a_{2j}^{''}x_j^{'} + \dots + a_{2n}^{''}x_n^{'} = b_2^{''}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x_j + a_{jm+1}^{''}x_{m+1}^{'} + a_{jm+2}^{''}x_{m+2}^{'} + \dots + a_{ji}^{''}x_j^{'} + \dots + a_{jn}^{''}x_n^{'} = b_j^{''}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x_m + a_{mm+1}^{''}x_{m+1}^{'} + a_{mm+2}^{''}x_{m+2}^{'} + ..+ a_{mj}^{''}x_j^{'} + \dots + a_{mn}^{''}x_n^{'} = b_m^{''}
\end{aligned}\right\} (3)$$

ko‘rinishda, maqsad funksiya (3.2) ni esa

$$Z_{\min} + c_{m+1}^{''}x_{m+1} + c_{m+2}^{''}x_{m+2} + \dots\dots\dots + c_j^{''}x_j + \dots\dots c_n^{''}x_n = c_0^{''} \quad (4)$$

ko‘rinishda yozib olamiz va Simpleks jadval deb yuritiluvchini quyidagicha yozish mumkin:

1-jadval

Bazis noma’lumlar	Ozod hadlar	x_1	x_2	…	x_i	…	x_m	x_{m+1}	…	x_j	…	x_n
x_1	$b_1^{'}$	1	0	…	0	…	0	$a_{'m+1}^{'}$	…	$a_{1j}^{'}$	…	$a_{1n}^{'}$
x_2	$b_2^{'}$	0	1	…	0	…	0	$a_{2m+1}^{'}$	…	$a_{2j}^{'}$	…	$a_{2n}^{'}$
…	…	…	…	.	…	…	...	…	…	…	…	...
x_i	$b_i^{'}$	0	0	…	1	…	0	$a_{im+1}^{'}$	…	$a_{ij}^{'}$	…	$a_{in}^{'}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_m	$b_m^{'}$	0	0	…	0	…	1	$a_{mm+1}^{'}$	…	$a_{mj}^{'}$	…	$a_{mn}^{'}$
Z	c_0^i	0	0	…	0	…	0	$c_{m+1}^{'}$	…	$c_j^{'}$	…	$c_n^{'}$

1-jadvalning x_1 dan boshlanuvchi satrida (2) sistemadagi birinchi tenglamaning ozod hadi va noma’lumlar oldidagi koeffitsiyentlar, $x_2$dan boshlanuvchi satrida esa ikkinchi tenglamaning ozod hadi va noma’lumlar oldidagi koeffitsiyentlar joylashtirilgan va hokazo. Z dan boshlanuvchi oxirgi satrida esa (3) tenglikdagi ozod had va noma’lumlar oldidagi koeffitsiyentlar joylashtirilgan. Xuddi shu usul bilan berilgan masalaga mos keluvchi jadvalni ham tuzish mumkin1-jadvaldan foydalanib, 2-jadval quyidagicha tuziladi: Z ga mos keluvchi satr elementlari orasida musbatlari bo‘lsa, shu elementlarning eng kattasi joylashgan, ya’ni s_{ij}joylashgan ustun

2-jadval

Bazis noma’lumlar	Ozod hadlar	x_1	x_2	…	x_i	…	x_m	x_{m+1}	…	x_j	…	x_n
x_1	b''_1	1	0	…	0	…	0	$a''_{'m+1}$	…	a''_{1j}	…	a''_{1n}
x_2	b''_2	0	1	…	0	…	0	a''_{2m+1}	…	a''_{2j}	…	a''_{2n}
…	…	…	…	.	…	…	...	…	…	…	…	...
x_i	b''_i	0	0	…	1	…	0	a''_{im+1}	…	a''_{ij}	…	a''_{in}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_m	b''_m	0	0	…	0	…	1	a''_{mm+1}	…	a''_{mj}	…	a''_{mn}
Z	c''_0	0	0	…	0	…	0	c''_{m+1}	…	c''_j	…	c''_n

elemeitlaridan musbatini belgilab olamiz, masalan, a_{kj}>0 bo‘lsin. Ajratilgan musbat a_{kj}elementlar bilan bitta satrda joylashgan ozod hadlar b'_kning shu a_{kj}larga nisbatini tuzamiz va tuzilgan nisbatlarning eng kichigini $\frac{b'_i}{a'_{ij}}$ bilan belgilaymiz. a_{kj} — hal qiluvchi elementdir. 1-jadvalda hal qiluvchi element, a_{kj} to‘rtburchak ichigaolingan, u turgan ustun va satr strelkalar bilan ko‘rsatilgan.

Hal qiluvchi a_{kj} element 1 dan farqli bo‘lsa, uni 1 ga teng qilib olish mumkin. Buning uchun, shu element joylashgan satrning barcha elementlarini a_{kj} ga bo‘lish kifoya. Buning o‘zi esa*i* tenglamani $x_i$ga nisbatan yechish bilan teng kuchlidir. Endi 1-jadval satrlarining elementlarini shunday o‘zgartiramizki, hal qiluvchi element turgan ustundagi shu elementdan boshqalari 0 gaaylansin. Buning uchun 1 - jadvalning *i* satrini $-a'_{kl}$, k = 1,m, k ≠ l va c'_i ga ko‘paytirib, mos ravishda k = 1, 2, 3,…, m+1, k ≠ i satrlarga qo‘shamiz. U holda yuqorida keltirilgan 7.2-jadval kelib chiqadi. Yuqorida bajarilgan ish natijasida avvalgi x_1, x_2, ... x_i, ..., $x_t$bazisdagi x_io‘rniga $x_j$keladi va 7.2- jadvalda ko‘rsatilgandek yangi x_1 x_2, ... x_i, ..., x_t bazis hosil bo‘ladi.

Agar 2-jadvalning oxirgi satridagi barcha s''_i, s''_{t+1}, . . ., s''_plar manfiy bo‘lsa, Z_{min} =c'_0bo‘ladi, aks holda yuqorida ko‘rsatilgan usul bilan 3-jadval tuzishga to‘g’ri keladi. Bu protsess optimal yechim topilguncha yoki masalaning yechimi mavjud emasligi isbotlangunga qadar davom ettiriladi.

Agar birorta 2- jadvalda hal qiluvchi element turishi mumkin bo‘lgan ustunning barcha elementlari manfiy bo‘lsa Z_{min} =- ∞ bo‘lib, masala yechimga ega emasligi isbotlangan bo‘ladi.

Misol. Ushbu

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_4 - 2x_5 &= 1 \\ x_2 - 2x_4 + x_5 &= 2 \\ x_3 + 3x_4 + x_5 &= 3 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

sistemaning manfiy bo‘lmagan yechimlari orasidan

$$Z=0+x_4+x_5 \quad (5)$$

funksiyaga minimum qiymat beruvchi yechimni toping.

Yechish. jadval tuzish uchun

$x_1 + x_4 - 2\,x_5=1,$

$x_2 - 2\,x_4+ x_5=2,$

$x_1 +3\,x_4-2\,x_5=3,$

$Z - x_4 + x_5=0,$

ko‘rinishda yozib olamiz. Sistemani x_1, x_2, $x_3$ga nisbatan osongina yechish mumkin. Shuning uchun bu noma’lumlarni sistemaning bazis noma’lumlari deb qabul qilamiz. Bazis noma’lumlar — x_1, x_2, $x_3$va Zlarni jadvalning birinchi ustuniga, ozod hadlarni ikkinchi ustuniga, $x_1$ning koeffitsiyentlarini uchinchi ustuniga va hokazo $x_5$ning koeffitsiyentlarini oxirgi ustuniga yozib, quyidagi 3-jadvalga ega bo‘lamiz:

3-jadval

Bazis noma’lumlar	Ozodhadlar	x_1	x_2	x_3	x_4	X_5
x_1	1	1	0	0	1	-2
x_2	2	0	1	0	-2	1
x_3	3	0	0	1	3	1
Z	0	0	0	0	-1	1

*Z*dan boshlanuvchi oxirgi satrda musbat son bo‘lganligi uchun *Z*ni kamaytirish imkoniyati bor. Shuning uchun x_1, x_2, x_3bazisdan yangi bazisga o‘tamiz. Bu ish jadvallar yordamida quyidagicha bajariladi:

1) *Z* dan boshlanuvchi oxirgi satrda bitta musbat 1 soni bor. Bu musbat son bittagina bo‘lgani uchun u joylashgan ustunni hal qiluvchi ustun deb qaraymiz (agar oxirgi satrda musbat sonlar ikkita va undan ortiq bo‘lsa, ularning eng kattasi joylashgan ustun hal qiluvchi ustun bo‘ladi);

2) hal qiluvchi ustundan musbat elementlarni olamiz. Ular ikkita bo‘lib, 2 va 3- satrlarga joylashgan, agar bitta bo‘lsa, shu sonning o‘zi hal qiluvchi element bo‘ladi.

Ajratilgan musbat elementlar bilan bitta satrda joylashgan ozod hadlarning shu sonlarga nisbatlarini tuzamiz. Bu nisbatlar:

$$\frac{2}{1}=2 \quad va \quad \frac{3}{1}=3 \text{ bo‘ladi;}$$

3) tuzilgan nisbatlardan eng kichigining maxraji hal qiluvchi element bo‘ladi. 7.3- jadvalda hal qiluvchi element to‘rtburchak ichiga olingan va shu element joylashgan satr va ustun strelka bilan ko‘rsatilgan;

4) hal qiluvchi element 1 ga teng bo‘lgani uchun shu element turgan satrni 1 ga bo‘lgan bilan bu satr elementlari o‘zicha qolaveradi;

5) 3- jadvalning hal qiluvchi element turgan ikkinchi satrini -2,-1, -1 ga ko‘paytirib, mos ravishda 1, 3, 4 — satrlarga qo‘shsak, hal qiluvchi elemeng turgan ustunda shu elementlardan boshqalari 0 larga aylanadi va 4- jadval kelib chiqadi (4-jadvalga qarang).

6) yuqoridagilarga asosan avvalgi x_1 x_2, $x_3$bazisdagi x_2o‘rniga x_5 keladi va 7.4-jadvalda ko‘rsatilgandek, bazisdagi x_2 o‘rniga x_5, keladi va 4- jadvalda ko‘rsatilgandek, yangi x_1, x_5, $x_3$bazis hosil bo‘ladi.

4-jadval

Bazisnoma’lumlar	Ozodhadlar	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	5	1	2	0	-3	0
x_2	2	0	1	0	-2	1
x_3	1	0	-1	1	5	0
Z	-2	0	- 1	0	1	0

4- jadvalning - *2* dan boshlanuvchi oxirgi satrida faqat bitta musbat element mavjud. Bu ustunda bittagina musbat elemeit bor. Uni hal qiluvchi element deb hisoblab, uchinchi bazisga o‘tamiz. Bu ish natijasi quyidagi 5- jadvalda keltirilgan.

5-jadvalga

Bazisnoma’lumlar	Ozodhadlar	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	28/5	1	7/5	3/5	0	0
x_2	12/5	0	3/5	2/5	0	1
x_4	1/5	0	-1/5	1/5	1	0
Z	-11/5	0	-4/5	-1/5	0	0

5- jadvalning oxirgi satrida birorta ham musbag element qolmadi. Demak, topilgan

$$\left\{\frac{28}{5};0;0;\frac{1}{5};\frac{12}{5}\right\}$$

yechim optimal bo‘lib, unga mos kelgan Z ning minimumiga teng, ya’ni

$$Z_{\min} = -\frac{11}{5}$$

Takrorlash uchun savollar:

1.Chiziqli dasturlash masalasining qo‘yilishi.

2. Chiziqli dasturlash masalasining masalasining matematik modelini qurib bering

3.O‘rinli yechim nima?
4. Optimal yechim nima?
4.Shimoliy – g’arb burchak usuli?