



Course name: *Algorithm of calculating methods*

Course language: **Uzbek**

Instructor: **Muhtorjon Yusupov**

Lecture 12: *Geometric interpretation of linear programming problems*

Fan nomi: *Hisoblash usullarini algoritmlash*

Fan o'qituvchisi: **Muhtorjon Yusupov**

12-mavzu: *Chiziqli dasturlash masalalarining geometrik va matematik asoslari*

12-mavzu. Chiziqli dasturlash masalalarining geometrik va matematik asoslari

Reja:

1. Chiziqli dasturlash masalasining matematik asoslari
2. Chiziqli programmalash masalalari uchun bazis tanlash

Tayanch iboralar:

Chiziqli dasturlash masalasi, bazis tanlash, simpleks

Chiziqli programmalash masalasining matematik asoslari

Umumiy holda, biror ishlab chiqarish korxonasida n xil mahsulot ishlab chiqarilayotgan bo'lib, buning uchun m xil xomashyo (ishlab chiqarish resurslari)dan foydalanilayotgan bo'lsin. Har bir ishlab chiqarilayotgan j – mahsulot uchun i – xomashyodan a_{ij} birlik ishlatilayotgan bo'lsin. Korxonada i – xomashyodan b_i birlik bor bo'lsin. Agar j – mahsulotning bir birligining narxi C_j pul birligiga teng bo'lsa korxonada har bir mahsulotdan necha donadan (birlikdan) ishlab chiqarganda ularni sotishdan keladigan daromad maksimal bo'ladi? Iqtisodiy nuqtai nazardan masala ana shunday ifodalanadi. Agar j – mahsulotning ishlab chiqarilishi kerak bo'lgan miqdorini X_j deb belgilasak va keltirilgan shartlarning barchasini matematik tarzda ifodalasak u quyidagi ko'rinishini oladi.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.1)$$

$$x_j \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n C_j X_j \rightarrow \max \quad (2.2)$$

Chiziqli programmalash masalasi (ChPM)ning matematik ifodasi (2.1) – (2.2) bo'lib, unga ko'ra n o'lchovli fazoning (2.1) shartlarni qanoatlantiruvchi (x_1, x_2, \dots, x_n) nuqtalari orasidan shundayini topish kerakki, (2.2) maqsad funksiyasining maksimal (eng katta) qiymatini ta'minlasin. Avvalo masalaning (2.1) shartlari va ularni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami haqida to'xtalamiz. Bu shartlarning geometrik ma'nosini $n=2$ va $n=3$ bo'lgan hollarda batafsil ko'rib chiqildi (§1). Umumiy holda (2.1) shartlarning har biri n - o'lchovli fazodagi gipertekislik tenglamasi yordamida fazoni ikkiga bo'lish va undan bir tarafini olishni aks ettiradi. $x_j \geq 0$ shartlar ham n - o'lchovli fazoda $x_j = 0$ tenglamaga mos gipertekislikdan bir tarafini olishni ifodalaydi. n - o'lchovli fazoda ham qabariq soha ta'rifi va xususiyati odatdagi 2 va 3 o'lchovli real fazolardagidek bo'ladi. Chiziqli fazo amallari n o'lchovli fazo elementlari $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ lar uchun quyidagicha aniqlangan bo'lsin

$$\begin{aligned} X(x_1, x_2, \dots, x_n) + Y(y_1, y_2, \dots, y_n) &= Z(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \alpha \times X(x_1, x_2, \dots, x_n) &= T(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \end{aligned} \quad (2.3)$$

U holda \mathbf{n} o'lchovli fazodagi biror D sohaning ixtiyoriy ikkita $X, Y \in D$ elementlari uchun va ixtiyoriy $\alpha \in (0;1)$ sonlar uchun $\alpha \times X + (1-\alpha) Y \in D$ bo'lsa D soha qabariq soha deyiladi. Bu shart real fazolardagi qabariq soha ta'rifi (agar sohaning ixtiyoriy ikki nuqtasini tutashtiruvchi kesma ham shu sohaga tegishli bo'lsa soha qabariq soha deyiladi)ga to'la mos keladi. ChPM yechimini izlash odatda mumkin bo'lgan yechimlar sohasi (MBES)ni topishdan boshlanadi. MBESdan esa (2.2) maqsad funksiyasining maksimumi izlanadi. Avvalo ChPM uchun MBES doimo qabariq soha bo'lishligini ta'kidlab o'tishimiz kerak. Haqiqatdan, agar (2.1) shartlarni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamini D deb belgilasak va ixtiyoriy $X, Y \in D$ elementlarini olsak hamda $Z = \alpha X + (1-\alpha)Y$ elementini olsak $Z(z_1, z_2, \dots, z_n)$ uning uchun

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} z_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} (\alpha x_j + (1-\alpha)y_j) = \alpha \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + (1-\alpha) \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq \alpha \times b_i + (1-\alpha)b_i = b_i$$

kelib chiqadi, ya'ni $Z(z_1, z_2, \dots, z_n)$ uchun ham $\sum_{j=1}^n a_{ij} z_j \leq b_j \quad i = 1, 2, \dots, n$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi, demak $Z \in D$ bo'ladi. Aksariyat hollarda \mathbf{n} o'lchovli ChPMning MBESi \mathbf{n} o'lchovli qabariq soha bo'ladi. Bu holda ham masala yechimi, ya'ni optimal rejani shu qabariq sohaning uchlaridan izlanishi kerak. (2.1) shartlarga ko'ra aniqlanadigan D sohaning uchlarini topish uchun $\mathbf{m} + \mathbf{n}$ ta (2.1) shartlardan \mathbf{n} ta chiziqli erklisini tanlaymiz va ularni tenglik sifatida ifodalasak \mathbf{n} ta noma'lumli \mathbf{n} ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Bu sistemaning yechimini topib uni (2.1) shartlarning qolganlariga muvofiqligi tekshiriladi. Agar shunday bo'lsa, bu yechimga mos $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqta MBESning tayanch nuqtasi, uning koordinatalari esa ChPMning tayanch yechimi deyiladi.

Shunday usulda hosil qilish mumkin bo'lgan sistemalar soni umumiy holda C_{n+m}^n formula bo'yicha hisoblanadi. Bu sistemalardan ChPMning tayanch yechimlari topiladi. Tayanch yechimlar orasidan maqsad funksiyasining eng katta qiymatini beruvchi optimal reja ham topiladi. Faqat n, m ortgan sari tayanch yechimlar soni ham ortib boradi. Masalan $n=5, m=4$ bo'lgan, umuman olganda oddiygina holda ham tayanch yechimlar soni $C_9^5 = \frac{9!}{5!4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$ bo'lishi mumkin ekan.

Shuncha yechimning har birini topishda 5 noma'lumli sistemalarni ishlash kerak bo'ladi. Tabiiy savol tug'iladi, optimal rejani topish uchun ana shu 126 nuqtalarning barchasini topish, hamda shu nuqtalarda maqsad funksiyasini hisoblash shartmikan? Bu ishni osonlashtirish

ya'ni optimal rejaga yetish yo'lini qisqartirish imkoniyati yo'qmikan? Bu sohadagi izlanishlar o'z samarasini bergan va rejani bosqichma – bosqich yaxshilash degan usullar yaratilgan. Usulning g'oyasi asosan quyidagi mulohazaga asoslangan. Avvalo ixtiyoriy birorta tayanch yechim topamiz. Bu yechim MBES deb ataganimiz qabariq ko'pyoqlining birorta uchiga mos keladi. Ikki o'lchovli holda bu qabariq ko'pburchak, uch o'lchovli holda qabariq ko'pyoqli (prizma, piramida ...). Bu uchidan bir qancha qirralar o'tgan bo'ladi, go'yoki chorrahada uchrashadigan yo'llardek. Har bir qirra berilgan uchini boshqa bir qo'shni uch bilan tutashtiradi.

Shu yo'llardan qaysi birini tanlagan ma'qul, qay biri maqsadga tezroq olib boradi? Go'yo ertak qahramonlari oldida uchraydigan yo'llarda yozib qo'yiladigan yo'l ta'rifiga o'xshash bu yo'llar hislatlarini aniqlash mezonini yo'qimikan? Umuman maqsadga eltuvchi yo'lning o'zi bormikan? Ertaksifat bu mulohazalarning barchasiga javob beruvchi usul dastlab 1947 yil Dansig tomonidan kashf qilingan. Bu usul keyinchalik ilmiy va o'quv adabiyotlarida **simpleks usul** nomi bilan muomalaga kirib ketgan. Usulning matematik hamda amaliy tafsilotlariga o'tamiz.

3. Berilgan CHPM uchun ko'rsatilgan bazisga mos tayanch yechim topilsin. Tayanch yechimlar ko'pi bilan nechta bo'lishi mumkin.

$$3.1 \quad L(x_1, x_2, x_3) = 10x_1 + 5x_2 + 8x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 30 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 24 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$A_1 A_2$ bazisda

$$3.2 \quad L(x_1, x_2, x_3) = 8x_1 + 4x_2 + 6x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 \leq 18 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 24 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$A_1 A_3$ bazisda

$$3.3 \quad L(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 6x_2 + 8x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 20 \\ 8x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 24 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$A_2 A_3$ bazisda

$$3.4 \quad L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 10x_2 + 8x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 24 \\ 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 30 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$A_1 A_3$ bazisda

$$3.5 \quad L(x_1, x_2, x_3) = 6x_1 + 10x_2 + 8x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 \leq 24 \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 30 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$A_2 A_3$ bazisda

Chiziqli programmalash masalalari uchun bazis tanlash va masala shartlarini tanlangan bazisga moslashtirish.

Kanonik ko'rinishda berilgan ChPMni qaraymiz.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad i=1,2, \dots, m \quad (4.1)$$

$$x_j \geq 0 \quad j=1,2, \dots, n$$

$$L = \sum_{j=1}^n C_j x_j \rightarrow \max \quad (4.2)$$

Bu yerda avval ta'kidlaganimizdek $m < n$ bo'ladi, ya'ni (4.1) sistemaning yechimlari cheksiz ko'p. Shu yechimlar orasidan (4.2) shartga mos keladigani, ya'ni maqsad funksiyasiga maksimal qiymat beradiganini ajratib olish kerak. Buning uchun (4.1) sistema yechimlarini ifodalash qoidasini va ular orasidan bazis o'zgaruchilarni ajratish usulini aniqlashimiz kerak. (4.1) sistema matritsasi tartibi $m \times n$ bo'lganligi va $m < n$ bo'lgani uchun $R_g A \leq m$ bo'ladi. Qulaylik uchun $R_g A = m$ deb olamiz. Aksariyat hollarda bu shart bajariladi. A matritsadan o'zaro chiziqli erkli bo'lgan m ta ustunni ajratib olamiz. Bu ustunlarni $A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_m}$ deb belgilaymiz. Ular chiziqli erkli bo'lishi uchun shu ustun elementlaridan tuzilgan

$$C = (A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_m})$$

matritsa determinanti noldan farqli bo'lishi kerak, ya'ni $\det C \neq 0$. Tanlangan bazisga mos tayanch yechimni topish uchun esa shu bazisga mos $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}$ noma'lumlardan boshqa barcha x_j larni nolga teng deb olamiz. Natijada (4.1) sistema soddalashib

$$\sum_{k=1}^m a_{ik} x_{j_k} = b_i \quad i=1, 2, \dots, m \quad (4.3)$$

ko'rinishni oladi. Bu sistema m noma'lumli m ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi bo'lib qoladi. $\det C \neq 0$ bo'lganligi uchun uning yagona yechimi bo'ladi. Agar bu yechim uchun barcha $x_{j_k} \geq 0$ bo'lsa topilgan yechim tanlangan bazisdagi tayanch yechim deyiladi. Agar x_{j_k} lar orasida manfiylari ham chiqib qolsa, tanlangan bazisda tayanch yechim yo'q deyiladi va boshqa bazisga o'tiladi. Tayanch yechimi mavjud bo'lgan bazis tanlangach esa shu bazisdagi tayanch yechim optimallikka tekshiriladi. Bu esa avvalgi paragrafda ko'rilgan usulda amalga oshiriladi. Faqat buning uchun masala shartlari tanlangan bazisga moslashtirilishi kerak. Buning uchun tanlangan bazisga mos C matritsa uchun teskari matritsa topiladi va (4.2) sistema vektor ko'rinishida C^{-1} ga ko'paytiriladi. Bunda sistema

$$C^{-1}A\bar{X} = \bar{C}^{-1}\bar{b} \quad (4.4)$$

ko'rinishini oladi. (4.4) sistema (4.2) maqsad funksiyasi bilan birgalikda dastlabki simpleks jadval uchun asos qilib olinadi. Simpleks jadvaldan tanlangan bazisdagi

tayanch yechim optimal bo'lishi tekshirilishi mumkin. Keltirilgan mulohazalar va hisoblash jarayonini amaliy misolda tahlil qilamiz. Quyidagi ko'rinishdagi ChPM berilgan bo'lsin

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 7 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 9 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

$$L = 20x_1 + 15x_2 + 30x_3 + 25x_4 \rightarrow \max$$

Bu yerda matritsa ustunlari 4ta bo'lib ularni A_1, A_2, A_3, A_4 vektorlar deb belgilasak ular ikki o'lchovli fazo vektorlari ($m=2$) bo'lgani uchun bazis sifatida ulardan ikkitasini olish mumkin. Bunda variantlar soni $C_4^2 = 6$ ta bo'ladi. Ulardan ixtiyoriy bittasini, masalan A_1, A_2 bazis bo'lgan holni olsak $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ bo'lib

$\det C = 1 \neq 0$ ekanligini ko'ramiz. Bu bazisga mos yechimni topish uchun $x_3, x_4 = 0$ deb olinadi va sistema

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 7 \\ 4x_1 + 3x_2 = 9 \end{cases}$$

ko'rinishini oladi. Bu sistemani yechib $x_3 = 3; x_2 = -1$ ekanligini ko'ramiz. Bu yerda $x_2 < 0$ bo'lganligi uchun bu bazisdagi yechim tayanch yechim bo'la olmaydi. Boshqa bazis tanlashga to'g'ri keladi. Masalan A_2, A_3 bazisni olsak

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}; \det C = -3 \neq 0$$

Demak A_2, A_3 bazis bo'la oladi. Bu bazisdagi yechimni topish uchun sistemada $x_1 = 0; x_4 = 0$ deb olinsa u quyidagi ko'rinishni oladi

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 3x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

Bu sistemani yechib $x_2 = 2; x_3 = 1$ ekanligini ko'ramiz. Bu yerda $x_i \geq 0$, demak bu bazisdagi $x_1 = 0; x_2 = 2; x_3 = 1; x_4 = 0$ yechim tayanch yechim bo'lar ekan. Bu yechimning optimal bo'lish bo'lmasligini tekshirish uchun masala shartini tanlangan bazisga moslashtiramiz. Teskari matritsani hisoblash qoidasiga ko'ra

$$C^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

ekanligini ko'ramiz. Masala shartini shu teskari matritsaga ko'paytiramiz

$$-\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & -6 \\ -1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 2 \\ \frac{1}{3}x_1 + x_3 - \frac{2}{3}x_4 = 1 \end{cases}$$

Shartlar bazisga moslashtirildi, ya'ni bazis vektorlar A_2, A_3 ga mos ustunlar birlik vektor ko'rinishini oldi. Bu bazisga mos tayanch yechim $x_2 = 2; x_3 = 1$ optimalligini tekshirish uchun simpleks jadval tuzamiz

I	C_j			20	15	30	25	
	C_i	Baz	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	Θ
1	15	A_2	2	1	1	0	2	
2	30	A_3	1	1/3	0	1	$-\frac{2}{3}$	
		Δ_j		5	0	0	-15	

Bu jadvaldan ko'rinadiki, tanlangan bazisga mos tayanch yechim optimal emas ekan, chunki $\Delta_4 = -15 < 0$ bo'layapti. Rejani yaxshilash uchun bazisni almashtirish kerak. Buyog'i simpleks usul davom ettirilishi mumkin.

4. CHPM shartlari tanlangan bazisga moslashtirilsin. Shu bazisdagi tayanch yechim optimallikka tekshirilsin.

$$4.1 \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 25 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 26 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad A_1 A_4 \text{ bazis}$$

$$L = 5x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 4x_4 \rightarrow \max$$

$$4.2 \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 29 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 23 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad A_1 A_3 \text{ bazis}$$

$$L = 10x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 8x_4 \rightarrow \max$$

$$4.3 \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 28 \\ 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 36 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad A_1 A_2 \text{ bazis}$$

$$L = 8x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 \rightarrow \max$$

$$4.4 \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 40 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 33 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad A_2 A_3 \text{ bazis}$$

$$L = 6x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 5x_4 \rightarrow \max$$

$$4.5 \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 22 \\ 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 33 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad A_1 A_3 \text{ bazisda}$$

$$L = 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 3x_4 \rightarrow \max$$

$$4.6 \begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 40 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 32 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad A_3 A_4 \text{ bazisda}$$

$$L = 8x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 5x_4 \rightarrow \max$$

Takrorlash uchun savollar:

1. Chiziqli dasturlash masalasi nima?
2. Chiziqli dasturlash masalasining geometrik ma'nosi nimadan iborat?